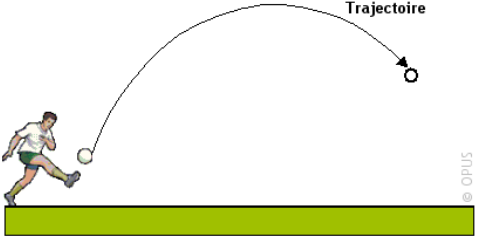
Chapitre 2
Intégrales curvilignes

Math pour Ingénieurs – S5/1A NRJ ; ISN

24 septembre 2023

Courbes

L'exemple basique de courbe est la trajectoire décrite par un objet assimilé à un point matériel (son centre de gravité) qui se déplace au cours du temps t sur un plan

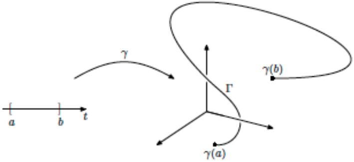


Définition

- Soit $\gamma : J = [a; b] \to \mathbb{R}^2$ (on peut aussi travailler dans $\mathbb{R}^3$) un champ vectoriel continu défini sur un intervalle J. L'ensemble des points images

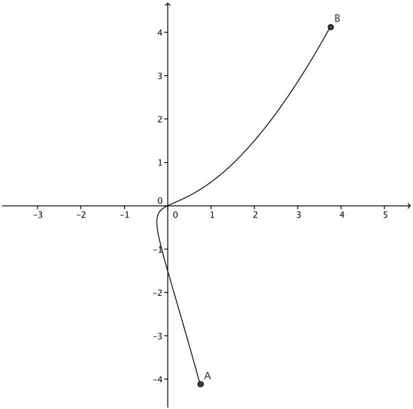
$$\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in J\}$$

est la **courbe** décrite par γ.
- La fonction γ est appelée **chemin**, c'est **un paramètrage** ou **une paramétrisation** de la courbe Γ.



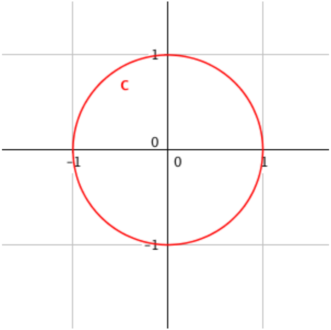
Exemples

La courbe



a pour paramètrage $\gamma(t) = (t^2 + t, t^3 + t/2)$ sur $[-3/2, 3/2]$.

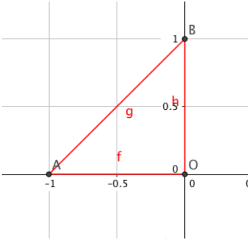
Une paramétisation du cercle unité



est

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi[$$

Le triangle *AOB*



a pour paramétrisation

$$AO : \{(t,0),\ t=-1 \to t=0\}$$

$$\cup$$

$$OB : \{(1,t),\ t=0 \to t=1)\}$$

$$\cup$$

$$BA : \{(t,1+t),\ t=0 \to t=-1]\}$$

Longueur d'arc

Définition

Soit γ un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ et régulier (i.e. $\gamma'(t) \neq 0$ en tout t). Le vecteur $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ est le vecteur tangent à la courbe γ au point $\gamma(t)$ et $\|\gamma'(t)\|$ sa norme.
On appelle **abscisse curviligne** d'origine **a**, la fonction

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(x)\| \, dx$$

(l'analogue, sur une courbe, de l'abscisse sur une droite orientée)

Longueur d'arc

Définition

La **longueur** de la courbe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) est donnée par

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Le **vecteur tangent unitaire** à la courbe en $\gamma(t)$ est défini par

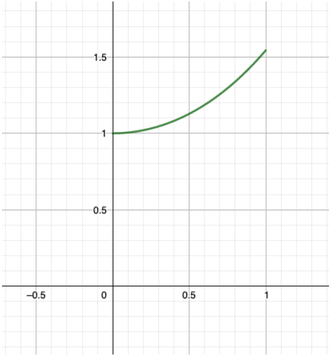
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

Il est dirigé dans le sens de l'orientation (mouvement)

Exemple

♠1 Calculer la longueur de la courbe

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = chx, x \in [0, 1]\right\}$$



Une paramétrisation de Γ est donnée par

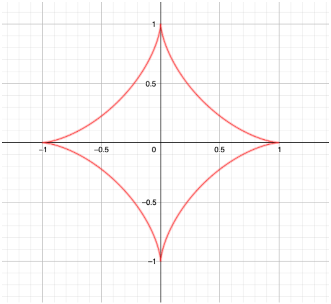
$$t \in [0,1] \to \gamma(t) = (t, \mathrm{ch}(t))$$

On a $\gamma'(t) = (1, \mathrm{sh}(t))$ et

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &= \gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|(1, \sin t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(t)} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\mathrm{ch}^2(t)} dt = \mathrm{sh}(1) \end{aligned}$$

♠2 Calculer la longueur de la courbe (astroïde) donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$



On a $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t$ et $y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$, de sorte que

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 9\cos^2 t \sin^2 t \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 9\cos^{\frac{1}{2}} t \sin^2 t$$

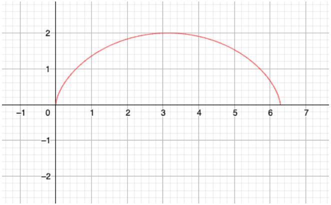
D'après la formule du cours, la longueur de l'astroïde est donc égale à

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} dt = 3\int_0^{2\pi} |\cos t \sin t| dt$$

$$= 12\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = 6\int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = 6$$

♠3 Calculer la longueur de la courbe donnée par

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases} \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$



On a $x'(t) = 1 - \cos t, y'(t) = \sin t$ de sorte que

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 2 - 2\cos t = 4\sin^2(t/2)$$

Pour $t \in [0, 2\pi], t/2 \in [0, \pi]$ et donc $\sin(t/2) \geq 0$. On en déduit que la

$$\int_0^{2\pi} 2\sin(t/2)dt = 8$$

Invariance par changement de paramètrage

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(x)\|\, dx, \quad \ell(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt, \quad \mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

Proposition

L'abscisse curviligne, la longueur d'arc et le vecteur tangent unitaire à la courbe ne dépendent pas du paramètrage γ choisi.

Quand on change de paramètrage en respectant l'orientation, les notions d'abscisse curviligne et de longueur sont inchangées. On peut le voir en utilisant la formule de changement de variable dans l'intégrale qui définit s. Du coup la notion de vecteur tangent unitaire est également inchangée.

Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Définition

Soit

$$\gamma : [a,b] \to \Gamma, \ \ \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

une courbe paramétrée de Γ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathbf{f}$ un champs de vecteurs continu défini sur Γ, $\mathbf{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.
L'**intégrale curviligne de f le long de** Γ est définie par :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{f} &= \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \left[(P(x(t), y(t)) x'(t) + (P(x(t), y(t)) y'(t) \right] dt \end{aligned}$$

Idem pour une courbe $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

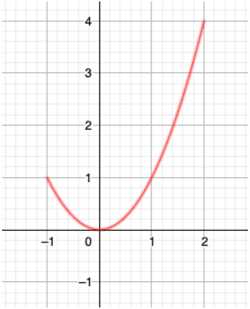
- L'intégrale $\int_\Gamma \mathbf{f}$ est parfois notée $\int_\Gamma \mathbf{f} \, d\ell$, pour bien préciser que l'on intègre le long d'une courbe.
- En physique, cette quantité s'appelle aussi **la circulation** de $\mathbf{f}$ le long de Γ ou en encore **le travail** de $\mathbf{f}$ le long de Γ.
- Lorsque le chemin Γ est fermé, $\int_\Gamma \mathbf{f}$ est notée $\oint_\Gamma \mathbf{f}$.

Exemple

♠4 Soit le champ de vecteur

$$\mathbf{f}(x,y) = (xy, x+y)$$

Calculer le travail de **f** le long de la courbe (parabole) donnée par $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 2$ parcouru dans le sens direct.



Une paramétrisation de la courbe est donnée par $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t = -1 \to t = 2$. Donc

$$\int_\Gamma f = \int_{-1}^{2} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_{-1}^{2} (t \times t^2, t + t^2) \cdot (1, 2t) dt = \int_{-1}^{2} t^3 + 2t(t + t^2) dt = \frac{60}{4}$$

Exemple

♠5 Soit le champ de vecteur

$$\mathbf{f}(x,y) = (y\sin(x), x\cos(y))$$

Calculer le travail de $\mathbf{f}$ le long du segment OA de $O(0,0)$ vers $A(1,1)$.

Une parametrisation de la courbe est $\gamma(t) = (t, t)$ $t = 0 \to 1$. Donc

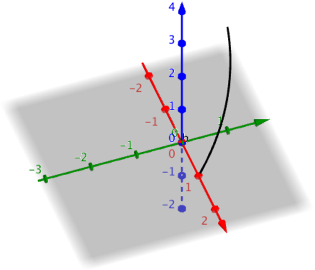
$$\int_\Gamma f = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^1 (t \sin(t), t \cos(t)) \cdot (1, 1) dt$$

$$= \int_0^1 t(\sin(t) + \cos(t)) dt = 2 \sin(1) - 1$$

Exemple

♠6. Soit l'hélice circulaire Γ paramétrée par
$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.



(a) Calculer la longueur de cette hélice.
(b) Soit $\mathbf{f}(x,y,z) = (y,z,x)$, Montrer que $\int_\Gamma \mathbf{f} = \frac{\pi r}{4}(2h - r)$.

(a)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} ||\gamma'(t)|| dt &= \int_0^{\pi/2} ||(-r\sin(t), r\cos(t), h)|| dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2\sin^2(t) + r^2\cos^2(t) + h^2} dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 + h^2} dt = \pi/2\sqrt{r^2+h^2}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\gamma &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (r\sin(t), ht, r\cos(t)) \cdot (-r\sin(t), r\cos(t), h) dt \\
&= \int_0^{\pi/2} -r^2\sin(t)^2 + hrt\cos(t) + rh\cos(t) dt = \frac{\pi r}{4}(2h - r).
\end{aligned}$$

Intégrale curviligne d'un champ scalaire

Soit

$$\gamma : [a,b] \to \Gamma, \;\; \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

une courbe paramétrée de Γ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ un champs **scalaire** continu.

L'**intégrale curviligne de φ le long de** Γ est donnée :

$$\int_\Gamma \varphi = \int_a^b \varphi(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt.$$

Circulation d'un champ de gradient

Théorème

Soit $\gamma : [a, b] \to \Gamma$ *un chemin de classe* $\mathscr{C}^1$ *et* $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ *un champs* **scalaire** *de classe* $\mathscr{C}^1$*. Alors*

$$\int_\Gamma \nabla\varphi = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

De plus si Γ *est fermé, alors* $\int_\Gamma \nabla\varphi = 0$*.*

(Généralisation de $\int_a^b \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$)

Définition

On dira qu'un champs de vecteur $\mathbf{f}$ défini sur un ouvert Ω est **conservatif** ou **dérive d'un potentiel**, s'il existe un champs scalaire φ sur Ω tel que $\mathbf{f} = \nabla\varphi$. Dans ce cas φ est appelée un **potentiel** de $\mathbf{f}$.

Théorème

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{f}$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω.
Si $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel sur Ω alors

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \ \ \forall i,j \tag{1}$$

- Si $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel φ alors la circulation de $\mathbf{f}$ le long d'un chemin Γ reliant un point a à un point b est

$$\int_\Gamma \mathbf{f} = \varphi(b) - \varphi(a)$$

- La condition (1) s'ecrit aussi

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{f}(x) = 0, \ \ \forall x \in \Omega.$$

- La condition (1) n'est pas suffisante pour garantir l'existence d'un potentiel. Il faut pour cela des conditions sur Ω. Si Ω est convexe, ou plus généralement simplement connexe (sans trou) la condition est bien suffisante.
- Dans un domaine (ensemble ouvert connexe), le potentiel est unique à une constante près.

Théorème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un domaine et soit* $\mathbf{f}$ *un champs de vecteurs de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* Ω*. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathbf{f}$ *dérive d'un potentiel ;*

(b) Pour toute courbe simple, **fermée**, *régulière par morceaux,* $\Gamma \subset \Omega$,

$$\int_\Gamma \mathbf{f} = 0$$

(c) Si $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Omega$ *sont deux courbes, simples, régulières par morceaux joignant deux point* A *et* B*, alors*

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{f} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}$$

Exemple 1

♠7 Soit $\mathbf{f}(x,y) = (4x^3y^2, 2x^4y + y)$ défini sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f dérive d'un potentiel.

Comme $\mathbb{R}^2$ est convexe et que

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 8x^3y - 8x^3y = 0$$

$\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que nous allons le calculer. On a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 4x^3y^2 \; , \; \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x^4y + y$$

En intégrant la première équation par rapport à x, on obtient

$$\varphi(x,y) = x^4y^2 + g(y)$$

En dérivant cette dernière par rapport à y et en remettant dans la deuxième équation on trouve

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x^4y + g'(y) = 2x^4y + y$$

Ce qui implique que $g(y) = y^2/2 + c$ où c est une constante.
Finalement, le potentiel cherché est

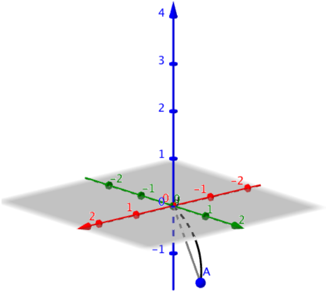
$$\varphi(x,y) = x^4 y^2 + \frac{y^2}{2} + c$$

Exemple : Test Novembre 2018

♠8 Soit le champ de vecteurs $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x+z, -3xy, x^2).$$

(1) Calculer la circulation de ce champ de vecteurs entre les points $O(0,0,0)$ et $A(1,2,-1)$ le long
des chemins suivants :
(a) Γ_1 : $(x = t^2,\ y = 2t,\ z = -t)$;
(b) Γ_2 : le segment $[O, A]$.
(2) Que peut-on en déduire sur $\mathbf{f}$.



(1) (a) Soit

$$\gamma(t) = (t^2, 2t, -t) \quad t = 0 \to t = 1$$

la paramétrisation du chemin le long de Γ_1 allant de O à A. Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\ell &= \int_0^1 \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_0^1 (t^2 - t, -6t^3, t^4) \cdot (2t, 2, -1) dt \\
&= \int_0^1 -t^4 - 10t^3 - 2t^2 \\
&= -\left(\frac{1}{5} + \frac{5}{2} + \frac{2}{3}\right) = \boxed{-\frac{101}{30}}
\end{aligned}$$

(b) Le segment $[O, A]$ est paramétré par

$$\beta(t) = (t, 2t, -t), \;\; t = 0 \to t = 1$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{[O,A]} \mathbf{f} \cdot d\ell &= \int_0^1 \mathbf{f}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt \\
&= \int_0^1 -13t^2 dt \\
&= \boxed{-\frac{13}{3}}
\end{aligned}$$

(2) Comme $\int_{\Gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\ell \neq \int_{[O,A]} \mathbf{f} \cdot d\ell$, le champ de vecteurs $\mathbf{f}$ ne dérive pas d'un potentiel.

Exemple

♠9 Soit le champ vectoriel

$$\mathbf{f}(x),y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$$

Défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel sur

$$\Omega_1 \quad = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0\}$$

donné par

$$\varphi(x,y) = -\arctan\frac{x}{y} + c_1$$

On verra cela plus loin (pour les formes différentielles)

Formes différentielles

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
On appelle **1-forme différentielle** définie sur U toute application

$$\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

où $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.
1-forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^n$ est notée abusivement

$$\omega(x) = P_1(x)dx_1 + \ldots + P_n(x)dx_n$$

La 1-forme différentielle est de classe $\mathscr{C}^k$ si, et seulement si les applications $P_1, \ldots, P_n$ le sont.

Exemple

Sur $\mathbb{R}^2$, on préfère dx et dy à dx_1 et dx_2.

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx - \frac{y}{x^2+y^2}dy$$

est une 1-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Définition

Une 1-forme différentielle ω sur U est dite **exacte** s'il existe $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\omega = Df$. On dit alors que f est une primitive de ω.

Proposition

La 1-forme différentielle $\omega = \sum P_i dx_i$ définie sur U est exacte si, et seulement si, il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = P_i, \ \forall i$$

Exemple 1

♠10 Considérons

$$\omega = (x - yz)dx + (y - xz)dy + (z - xy)dz$$

définie sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que ω est exacte.
Supposons qu'il existe f solution de $\omega = df$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = x - yz \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = y - xz \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = z - xy \tag{4}$$

De (2) on a $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 - xyz + g(y,z)$. Dans (3) on obtient $g(y,z) = \frac{1}{2}y^2 + h(z)$ et dans (4) on obtient $h(z) = \frac{1}{2}z^2 + c$. Finalement $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - xyz + c$ où c est une constante. Inversement une telle fonction est solution du système. La 1-forme différentielle ω est donc exacte.

Exemple 2

♠11 Considérons la 1-forme $\omega(x,y) = -\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy$. définie sur $\mathbb{R}^2$. La forme ω est-elle exacte ?
Supposons qu'il existe f solution de $\omega = df$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y/2 \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x/2 \tag{6}$$

(5) donne $f(x,y) = -xy/2 + g(y)$. Dans (6) on obtient $g'(y) = x$. Ce qui est impossible (car g ne dépend pas de x). La 1-forme n'est donc pas exacte.

Proposition

*Soit $\omega = \sum P_i dx_i$ une 1-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
Si ω est exacte, alors $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$, $\forall i \neq j$.*

Définition

Soit $\omega = \sum P_i dx_i$ une 1-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
On dit que ω est **férmée** si

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}, \forall i \neq j$$

Donc toute 1-forme exacte est fermée. La 1-forme

$\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx - \frac{y}{x^2+y^2} dy$ est fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Théorème (Théorème de Poincaré)

Toute 1-forme différentielle fermée définie sur un ouvert étoilé est exacte.

Exemple

♠12 On considère la forme différentielle $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, définie sur le demi-plan $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\right\}$. Montrer que ω est exacte. Chercher ses primitives sur U

Remarquons d'abord que U est étoilé, par exemple par rapport au point $(1,0)$. On vérifie ensuite que ω est fermée. En effet, si on pose

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \text{ et } Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

on vérifie aisément que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Par le théorème de Poincaré, ω est exacte. Cherchons ses primitives sur U, i.e. les fonctions f de classe C^1 sur U telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

On commence par résoudre la deuxième équation, en intégrant par rapport à y. On trouve :

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + H(x)$$

où H est une fonction C^1 qui ne dépend que de x. On introduit cette expression de f dans la deuxième égalité :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = H'(x) - \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Donc $H'(x) = 0$ sur U ce qui entraine que H est une constante ? La primitive de ω est de la forme

$$f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x}) + c$$

Exemple

♠13 On considère la forme différentielle de degré 1 définie par :

$$\omega = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$$

sur $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\right\}$.

1. Montrer que ω est fermée sur U.
2. Montrer de deux façons différentes que ω est exacte.
3. Calculer $\int_{(C)} \omega$, où (C) est une courbe C^1 par morceaux d'origine $A = (1,2)$ et d'extrémité $B = (3,8)$

1. En posant $P(x,y) = \frac{2x}{y}$ et $Q(x,y) = \frac{-x^2}{y^2}$, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2x}{y^2}$$

2. La forme différentielle est fermée, et l'ouvert U est étoilé. D'aprés le théoréme de Poincaré, la forme différentielle est exacte. On peut aussi prouver qu'elle est exacte en calculant ses primitives, i.e. en recherchant f telle que : $\omega = df$. On doit alors résoudre :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2}{y^2}$$

La premiere équation donne :

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} + H(y)$$

et on introduit dans la seconde pour obtenir :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + H'(y) = -\frac{x^2}{y^2}$$

On a donc $H(y) = \text{Cste}$, et on vérifie aisément que $f(x,y) = x^2/y$ est une primitive de ω : ω est exacte. 3. Le calcul ne dépend pas du chemin choisi, mais uniquement des extrémités pour une forme différentielle exacte. On trouve :

$$\int_C \omega = f(3,8) - f(1,2) = 9/8 - 1/2 = 5/8$$

Exemple

♠14 1. Trouver une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et vérifiant $\varphi(0) = -1$ telle que la forme différentielle ω suivante soit exacte sur $\mathbb{R}^2$:

$$\omega(x,y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}dx + \varphi(x)dy$$

2. Donner alors une primitive de ω.
3. En déduire $\int_C \omega$ pour l'ellipse d'équation $3x^2 = -7y^2 + 21$, orientée dans le sens direct.

1. Pour que la forme différentielle soit exacte, il faut qu'elle soit fermée. On a donc :

$$\varphi'(x) = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

On en déduit, avec la condition initiale, que

$$\varphi(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

Avec cette condition, la forme différentielle est fermée, et comme elle est définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est étoilé, elle est exacte. 2. Il suffit de résoudre le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{\left(1+x^2\right)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{1+x^2} \end{cases}$$

On commence par exemple par intégrer la seconde équation :

$$f(x,y) = \frac{-y}{1+x^2} + H(x)$$

Si on reporte cette forme dans la première équation, on trouve $H'(x) = 0$, et donc

$$f(x,y) = \frac{-y}{1+x^2}$$

est une primitive de ω sur $\mathbb{R}^2$. 3. La courbe C est fermée, et la forme différentielle est exacte, donc son intégrale curviligne le long de cette courbe est nulle.

Intégrale d'une forme différentielle

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ une 1-forme sur U et Γ une courbe régulière sur U décrite par $\gamma : [a,b] \to U$, $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$.

Définition

On appelle intégrale de ω le long de Γ le réel

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} P_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) x_i'(t) dt$$

On remarque que $\int_\Gamma \omega$ n'est autre que l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{f}$ où $\mathbf{f}$ est le champ de vectoriel

$$\mathbf{f}(x) = (P_1(x), \dots, P_n(x)).$$

Exemple

♠12 $\omega(x,y) = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ et Γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ paramétré par $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\int_\Gamma \omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos^2 t + ab\sin^2 t dt = \pi ab$$

On remarque que c'est exactement l'intégrale curviligne le long de Γ du champ de vecteur $\mathbf{f}(x,y) = (-y/2, x/2)$,

$$\int_\Gamma \mathbf{f} = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Même origine, même extrémité, mais chemins différents ...

♠13 Soit la forme différentielle $w = x^2dx - xydy$ et calculons l'intégrale curviligne de ω pour les contours suivants :

- Γ_1 est le segment de droite $[OA]$ où $O(0,0)$ et $A(1,1)$: on paramètre ce segment en posant $y = x$, $0 \leq x \leq 1$. On a donc
$$\int_{\Gamma_1} \omega = \int_0^1 (x^2 - x^2)dx = 0$$
- Γ_2 est l'arc de parabole $x = y^2$, $0 \leq x \leq 1$, orienté dans le ses des x croissants : (on déjà une paramétrisation de Γ_2)
$$\int_{\Gamma_2} \omega = \int_0^1 (2y^5 - y^3)dy = \frac{1}{12}$$

Les deux contours précédents ont même origine et même extrémité. La forme différentielles ω ne peut être donc pas exacte, sinon son intégrale curviligne ne dépendrait pas du chemin choisi. On peut également vérifier que ω n'est pas exacte : $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -y$.