

# De la brisure de symétrie à l'holographie en théorie des représentations

M. Pevzner, Université de Reims Champagne-Ardenne

Journées  $SL(2, \mathbb{R})$   
IECL, Nancy, 12 mai 2022

Le Livre était au commencement ;  
le Livre était "*Analysis on Symmetric Cones*"  
et ce Livre était de Jacques et d'Adam.

Le Livre était au commencement ;  
le Livre était "*Analysis on Symmetric Cones*"  
et ce Livre était de Jacques et d'Adam.

Projet en commun avec Toshiyuki Kobayashi :

[Inversion of Rankin–Cohen operators via Holographic Transform](#)

*Annales de l'Institut Fourier*, Tome 70 (2020) no. 5 p. 2131–2190.

**Fait** Pour toute représentation unitaire  $\pi$  d'un groupe loc. compact  $G$ , il existe une mesure de Borel  $d\mu_\pi$  sur  $\widehat{G}$  et une fonction mesurable  $m_\pi = \widehat{G} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  telles que :

$$\pi \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} m_\pi(\sigma) \sigma d\mu_\pi(\sigma) = (\pi)_{disc} \oplus (\pi)_{cont}.$$

Si  $G$  est un groupe de Lie réel réductif une telle décomposition est unique.

- Dans ce cas la fonction  $m_\pi$  est  $d\mu_\pi$  p.p. bien définie.
- La décomposition est sans multiplicités si  $m_\pi \leq 1$ .

**Fait** Pour toute représentation unitaire  $\pi$  d'un groupe loc. compact  $G$ , il existe une mesure de Borel  $d\mu_\pi$  sur  $\widehat{G}$  et une fonction mesurable  $m_\pi = \widehat{G} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  telles que :

$$\pi \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} m_\pi(\sigma) \sigma d\mu_\pi(\sigma) = (\pi)_{disc} \oplus (\pi)_{cont}.$$

Si  $G$  est un groupe de Lie réel réductif une telle décomposition est unique.

- Dans ce cas la fonction  $m_\pi$  est  $d\mu_\pi$  p.p. bien définie.
- La décomposition est sans multiplicités si  $m_\pi \leq 1$ .

**Fait** Pour toute représentation unitaire  $\pi$  d'un groupe loc. compact  $G$ , il existe une mesure de Borel  $d\mu_\pi$  sur  $\widehat{G}$  et une fonction mesurable  $m_\pi = \widehat{G} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  telles que :

$$\pi \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} m_\pi(\sigma) \sigma d\mu_\pi(\sigma) = (\pi)_{disc} \oplus (\pi)_{cont}.$$

Si  $G$  est un groupe de Lie réel réductif une telle décomposition est unique.

- Dans ce cas la fonction  $m_\pi$  est  $d\mu_\pi$  p.p. bien définie.
- La décomposition est sans multiplicités si  $m_\pi \leq 1$ .

- Règles de brachement  $G \downarrow G'$ . Soit  $G' \subset G$  et  $\pi \in \widehat{G}$

$$\pi|_{G'} = \int_{\widehat{G'}} m_\pi(\nu) \nu d\mu(\nu).$$

Séries de Fourier, coefficients de Clebsch–Gordan, les règles de Littlewood–Richardson rules, la  $\theta$ -correspondance, les formules de Plancherel, la conjecture de Gross–Prasad ...

- Règles de brachement  $G \downarrow G'$ . Soit  $G' \subset G$  et  $\pi \in \widehat{G}$

$$\pi|_{G'} = \int_{\widehat{G'}} m_\pi(\nu) \nu d\mu(\nu).$$

Séries de Fourier, coefficients de Clebsch–Gordan, les règles de Littlewood–Richardson rules, la  $\theta$ -correspondance, les formules de Plancherel, la conjecture de Gross–Prasad ...

”La mathématique est l’art de donner le même nom à des choses différentes...”

- Règles de brachement  $G \downarrow G'$ . Soit  $G' \subset G$  et  $\pi \in \widehat{G}$

$$\pi|_{G'} = \int_{\widehat{G'}} m_\pi(\nu) \nu d\mu(\nu).$$

Séries de Fourier, coefficients de Clebsch–Gordan, les règles de Littlewood–Richardson rules, la  $\theta$ -correspondance, les formules de Plancherel, la conjecture de Gross–Prasad ...

”La mathématique est l’art de donner le même nom à des choses différentes...”

Contrôle de  $d\mu$  et de  $m_\pi(\nu)$  est un problème difficile. Meilleure situation :  $m(\pi, \nu) \leq 1$  pour presque tout  $\nu \in \widehat{G'}$ .

- Règles de brachement  $G \downarrow G'$ . Soit  $G' \subset G$  et  $\pi \in \widehat{G}$

$$\pi|_{G'} = \int_{\widehat{G'}} m_\pi(\nu) \nu d\mu(\nu).$$

Séries de Fourier, coefficients de Clebsch–Gordan, les règles de Littlewood–Richardson rules, la  $\theta$ -correspondance, les formules de Plancherel, la conjecture de Gross–Prasad ...

”La mathématique est l’art de donner le même nom à des choses différentes...”

Contrôle de  $d\mu$  et de  $m_\pi(\nu)$  est un problème difficile. Meilleure situation :  $m(\pi, \nu) \leq 1$  pour presque tout  $\nu \in \widehat{G'}$ .

L’anneau des  $G'$ -endomorphismes de  $\pi|_{G'}$  est commutatif.

# Opérateurs de brisure de symétrie

Soit  $\pi$  repr. continue de  $G$  et  $\nu$  repr. continue de  $G' \subset G$ .

- Opérateurs de brisure de symétrie (OBS) : éléments de  $\text{Hom}_{G'}(\pi|_{G'}, \nu)$
- Opérateurs holographiques : éléments de  $\text{Hom}_{G'}(\nu, \pi|_{G'})$

# Opérateurs de brisure de symétrie

Soit  $\pi$  repr. continue de  $G$  et  $\nu$  repr. continue de  $G' \subset G$ .

① Opérateurs de brisure de symétrie (OBS) : éléments de  $\text{Hom}_{G'}(\pi|_{G'}, \nu)$

② Opérateurs holographiques : éléments de  $\text{Hom}_{G'}(\nu, \pi|_{G'})$

# Opérateurs de brisure de symétrie

Soit  $\pi$  repr. continue de  $G$  et  $\nu$  repr. continue de  $G' \subset G$ .

- 1 Opérateurs de brisure de symétrie (OBS) : éléments de  $\text{Hom}_{G'}(\pi|_{G'}, \nu)$
- 2 Opérateurs holographiques : éléments de  $\text{Hom}_{G'}(\nu, \pi|_{G'})$

# Opérateurs de brisure de symétrie

Soit  $\pi$  repr. continue de  $G$  et  $\nu$  repr. continue de  $G' \subset G$ .

- 1 Opérateurs de brisure de symétrie (OBS) : éléments de  $\text{Hom}_{G'}(\pi|_{G'}, \nu) \subset \text{Hom}_{G'}(\nu^\vee, \pi|_{G'}^\vee)$ .
- 2 Opérateurs holographiques : éléments de  $\text{Hom}_{G'}(\nu, \pi|_{G'}) \subset \text{Hom}_{G'}(\pi|_{G'}^\vee, \nu^\vee)$ .

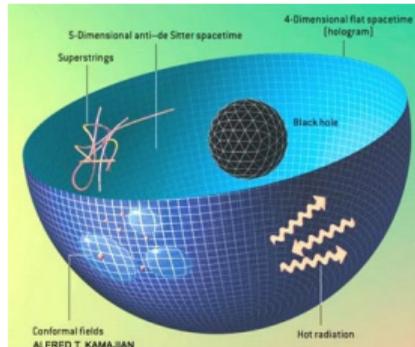
Pour les reps. unitaires les 2 familles sont liées via la contragrediente. Pour les repr. lisses ou des HC-modules - c'est plus difficile.

# Opérateurs de brisure de symétrie

Soit  $\pi$  repr. continue de  $G$  et  $\nu$  repr. continue de  $G' \subset G$ .

- 1 Opérateurs de brisure de symétrie (OBS) : éléments de  $\text{Hom}_{G'}(\pi|_{G'}, \nu)$
- 2 Opérateurs holographiques : éléments de  $\text{Hom}_{G'}(\nu, \pi|_{G'})$

Terminologie vient de la correspondance AdS/CFT.



## Transformation de brisure de symétrie

Soit  $\pi$  une représentation d'un groupe  $G$  dans un espace vectoriel  $V$ , et  $G'$  un sous-groupe de  $G$ . Le  $G$ -module  $(\pi, V)$  est un  $G'$ -module par restriction. Une **collection** d'opérateurs de brisure de symétrie,

$$R_\ell: V \longrightarrow W_\ell, \ell \in \Lambda,$$

où  $\rho_\ell$  est une famille de représentations irréductibles du sous-groupe  $G'$  dans des espaces vectoriels  $W_\ell$  dépendant d'un paramètre  $\ell \in \Lambda$  est appelée *transformation de brisure de symétrie*.

## Exemple : $GL_n \downarrow GL_{n-1}$

Arrangement des polynômes homogènes en  $x = (x_1, \dots, x_n)$  en ordre descendant par rapport au puissances de  $x_n$  est en un exemple de la transformation BS pour  $(G, G') = (GL_n, GL_{n-1})$ .

"L'extraction" de la  $\ell$ -ème composante du développement

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^k f_{\ell}(x') x_n^{k-\ell}, \quad \text{for } x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$$

definit un  $G'$ -homomorphisme de  $V := \text{Pol}^k[x]$  dans  $W_{\ell} := \text{Pol}^{\ell}[x']$  dans lesquels  $G$  and  $G'$ , resp. agissent irréductiblement.

## D'autres exemples classiques

- Développement en séries de Fourier : via la restriction des représentations de la série principale sphérique de  $G = SL(2, \mathbb{R})$  à  $G' := SO(2) \simeq S^1$ .

## D'autres exemples classiques

- Développement en séries de Fourier : via la restriction des représentations de la série principale sphérique de  $G = SL(2, \mathbb{R})$  à  $G' := SO(2) \simeq S^1$ .
- Transformation de Fourier sur  $L^2(\mathbb{R})$  via la restriction de la même représentation au sous-groupe unipotent  $G'' := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \xi \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}$ .

## D'autres exemples classiques

- Développement en séries de Fourier : via la restriction des représentations de la série principale sphérique de  $G = SL(2, \mathbb{R})$  à  $G' := SO(2) \simeq S^1$ .
- Transformation de Fourier sur  $L^2(\mathbb{R})$  via la restriction de la même représentation au sous-groupe unipotent  $G'' := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \xi \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}$ .
- Développement des fonctions sur  $S^n$  selon les fonctions propres du Laplacien  $\Delta_{S^n}$  (Harmoniques Sphériques) correspond à la transformation de brisure de symétrie pour les représentations de la série principale sphérique series de  $G = SO(n+1, 1)$  et une collection des représentations irréductibles de dimension finie du groupe compact  $G' = O(n+1)$ .

# Il y a un temps pour jeter des pierres et un temps pour les ramasser...

Renversant les flèches dans la définition de l'opérateur de brisure de symétrie  $R_\ell: V \rightarrow W_\ell$ , on définit un  $G'$ -homomorphisme  $\Psi_\ell: W_\ell \rightarrow V$ , appelé *opérateur holographique*.

La collection des opérateurs of holographiques  $\{\Psi_\ell\}$  est appelée *transformation holographique* :

$$G \curvearrowright V \begin{array}{c} \xrightarrow{R_\ell} \\ \xleftarrow{\Psi_\ell} \end{array} W_\ell \curvearrowleft G'.$$

L'intégrale de Poisson

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\nu: C_c(\mathbb{R}) &\longrightarrow C^\infty(\Pi) \\ h(t) &\mapsto (\mathcal{P}_\nu h)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^\nu}{((x-t)^2 + y^2)^\nu} h(t) dt\end{aligned}$$

produit des fonctions propres de l'opérateur de Laplace–Beltrami  $\Delta = y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$  de v.p.  $\nu(\nu - 2)$  sur le demi-plan supérieur  $\Pi$  muni de la métrique de Poincaré. Le groupe  $SL(2, \mathbb{R})$  agit par isométrie sur  $\Pi$  et conformément sur sa frontière.

## Transformation de Poisson

Un opérateur de brisure de symétrie générique  $A_{\lambda,\nu}$  de la repr. de la série principale sphérique  $\pi_\lambda$  de  $G = SL(2, \mathbb{C})$  sur  $C^\infty(S^2)$  vers celle  $\varpi_\nu$  du sous-groupe  $G' = SL(2, \mathbb{R})$  sur  $C^\infty(S^1)$  est de la forme :

$$\begin{aligned} A_{\lambda,\nu} : C_c^\infty(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \\ f(x, y) &\mapsto (A_{\lambda,\nu} f)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, y) K_{\lambda,\nu}(x - t, y) dt dy \end{aligned}$$

où  $K_{\lambda,\nu}$  est le noyau (au sens des distributions) donné par

$$K_{\lambda,\nu}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\nu} |y|^{\lambda+\nu-2}.$$

L'application duale à  $A_{\lambda,\nu}$  définit l'opérateur holographique  $\Psi_{\lambda,\nu}$  :

$$g(t) \mapsto (\Psi_{\lambda,\nu} g)(x, y) := \int_{\mathbb{R}} g(t) K_{\lambda,\nu}(x - t, y) dt.$$

Ainsi,  $\mathcal{P}_\nu = \text{Rest}_\Pi \circ \Psi_{2,\nu}$ .

# Deux problèmes

Soit  $R(v) = \{R_\ell(v)\}_{\ell \in \Lambda}$ , où  $R_\ell: V \rightarrow W_\ell$  ( $\ell \in \Lambda$ ) est une TBS.

# Deux problèmes

Soit  $R(v) = \{R_\ell(v)\}_{\ell \in \Lambda}$ , où  $R_\ell: V \rightarrow W_\ell$  ( $\ell \in \Lambda$ ) est une TBS.

## Problème A

Peut-on retrouver un élément  $v$  de  $V$  à partir de  $R(v) = \{R_\ell(v)\}_{\ell \in \Lambda}$  ?

# Deux problèmes

Soit  $R(v) = \{R_\ell(v)\}_{\ell \in \Lambda}$ , où  $R_\ell: V \rightarrow W_\ell$  ( $\ell \in \Lambda$ ) est une TBS.

## Problème A

Peut-on retrouver un élément  $v$  de  $V$  à partir de  $R(v) = \{R_\ell(v)\}_{\ell \in \Lambda}$  ?

Étapes intermédiaires :

- A.0.** Donner un critère *a priori* sur  $\Lambda$  pour que  $R$  soit injective.
- A.1.** Construire “une transformation holographique”.
- A.2.** Trouver une formule d'inversion explicite pour la TBS  $R$ .

# Deux problèmes

Soit  $R(v) = \{R_\ell(v)\}_{\ell \in \Lambda}$ , où  $R_\ell: V \rightarrow W_\ell$  ( $\ell \in \Lambda$ ) est une TBS.

## Problème A

Peut-on retrouver un élément  $v$  de  $V$  à partir de  $R(v) = \{R_\ell(v)\}_{\ell \in \Lambda}$  ?

Étapes intermédiaires :

**A.0.** Donner un critère *a priori* sur  $\Lambda$  pour que  $R$  soit injective.

**A.1.** Construire “une transformation holographique”.

**A.2.** Trouver une formule d'inversion explicite pour la TBS  $R$ .

Si  $V$  est un Hilbert et  $G$  y agit unitairement :

## Problème B. Théorèmes de type Parseval–Plancherel

Trouver une formule pour la norme d'un élément  $v$  de  $V$  en termes de sa transformée de brisure de symétrie  $\{R_\ell(v)\}_{\ell \in \Lambda}$ .

Crochets de Rankin–Cohen

$$RC_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''}$$

H. Cohen in 1975, *Math. Ann.*

Crochets de Rankin–Cohen

$$RC_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''}$$

H. Cohen in 1975, *Math. Ann.*

Opérateurs diff. conform.  
covariants de Juhl

$$D_{\lambda \rightarrow \nu}$$

A. Juhl Birkhäuser PiM  
book, 2007

Crochets de Rankin–Cohen

$$RC_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''}$$

H. Cohen in 1975, *Math. Ann.*

Opérateurs diff. conform.  
covariants de Juhl

$$D_{\lambda \rightarrow \nu}$$

A. Juhl Birkhäuser PiM  
book, 2007

Opérateurs diff. holomorphes équivariants entre des fibrés vectoriels homogènes sur des variétés complexes liés aux polynômes orthogonaux spéciaux.

$G = SL(2, \mathbb{R})$  un groupe de Lie simple réel, non-abélien et non-compact.

$G = SL(2, \mathbb{R})$  un groupe de Lie simple réel, non-abélien et non-compact.  $\widehat{G}$  contient une famille discrète  $\{\pi_\lambda\}_{\lambda>1}$ .

Une représentation de la *série discrète holomorphe*  $\pi_\lambda$  agit dans  $\mathcal{H}^2(\Pi)_\lambda := \mathcal{O}(\Pi) \cap L^2(\Pi, y^{\lambda-2} dx dy)$  par

$$(\pi_\lambda(g)f)(z) = (cz + d)^{-\lambda} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right),$$

où  $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$  et  $\Pi = \{z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y > 0\} \simeq SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ .

$G = SL(2, \mathbb{R})$  un groupe de Lie simple réel, non-abélien et non-compact.  $\widehat{G}$  contient une famille discrète  $\{\pi_\lambda\}_{\lambda>1}$ .

Une représentation de la *série discrète holomorphe*  $\pi_\lambda$  agit dans  $\mathcal{H}^2(\Pi)_\lambda := \mathcal{O}(\Pi) \cap L^2(\Pi, y^{\lambda-2} dx dy)$  par

$$(\pi_\lambda(g)f)(z) = (cz + d)^{-\lambda} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right),$$

où  $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$  et  $\Pi = \{z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y > 0\} \simeq SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ .

## Loi de branchement abstraite

$$\pi_{\lambda'} \otimes \pi_{\lambda''} \simeq \sum_{\ell \in \mathbb{N}}^{\oplus} \pi_{\lambda' + \lambda'' + 2\ell}.$$

## Les crochets de Rankin–Cohen sur $\Pi$

$$RC_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''}(f_1, f_2)(z) = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \binom{\lambda' + \ell - 1}{j} \binom{\lambda'' + \ell - 1}{\ell - j} f_1^{(\ell-j)}(z) f_2^{(j)}(z),$$

où  $f_1 \in \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda'}$ ,  $f_2 \in \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda''}$ ,  $f^{(a)}(z) := \frac{\partial^a f}{\partial z^a}$  et  $\lambda''' = \lambda' + \lambda'' + 2\ell$ .

## Les crochets de Rankin–Cohen sur $\Pi$

$$RC_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''}(f_1, f_2)(z) = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \binom{\lambda' + \ell - 1}{j} \binom{\lambda'' + \ell - 1}{\ell - j} f_1^{(\ell-j)}(z) f_2^{(j)}(z),$$

où  $f_1 \in \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda'}$ ,  $f_2 \in \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda''}$ ,  $f^{(a)}(z) := \frac{\partial^a f}{\partial z^a}$  et  $\lambda''' = \lambda' + \lambda'' + 2\ell$ .

## Équivariance

$RC_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''}$  sont des opérateurs d'entrelacement :

$$RC_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''}(\pi_{\lambda'}(g)f_1, \pi_{\lambda''}(g)f_2) = \pi_{\lambda'''}(g)RC_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''}(f_1, f_2).$$

pour tous  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $g \in SL(2, \mathbb{R})$ ,  $f_1 \in \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda'}$ ,  $f_2 \in \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda''}$ .

# Crochets de Rankin-Cohen : motivations

- Construction explicite des formes modulaires holomorphes et des formes quasi-modulaires.
- Quantification covariante :

$$f_1 \parallel f_2 = \sum_{a \in \mathbb{N}} c_{k_1, k_2}^{k_3} \mathcal{RC}_{k_1, k_2}^{k_1 + k_2 + 2a}(f_1, f_2),$$

géométrie non-commutative, cohomologie cyclique.

- Géométrie Différentielle (conforme, paraboliques etc.).

# Crochets de Rankin-Cohen : motivations

- Construction explicite des formes modulaires holomorphes et des formes quasi-modulaires.
- Quantification covariante :

$$f_1 \# f_2 = \sum_{a \in \mathbb{N}} c_{k_1, k_2}^{k_3} \mathcal{RC}_{k_1, k_2}^{k_1 + k_2 + 2a}(f_1, f_2),$$

géométrie non-commutative, cohomologie cyclique.

- Géométrie Différentielle (conforme, paraboliques etc.).

- Construction explicite des formes modulaires holomorphes et des formes quasi-modulaires.
- Quantification covariante :

$$f_1 \# f_2 = \sum_{a \in \mathbb{N}} c_{k_1, k_2}^{k_3} \mathcal{RC}_{k_1, k_2}^{k_1 + k_2 + 2a}(f_1, f_2),$$

géométrie non-commutative, cohomologie cyclique.

- Géométrie Différentielle (conforme, paraboliques etc.).

## Opérateur holomorphe de Juhl

$$D_{\lambda \rightarrow \nu} := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k \Gamma(\ell - k + \lambda - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(\lambda - \frac{n-1}{2} + \lfloor \frac{\ell+1}{2} \rfloor) \Gamma(k+1) \Gamma(\ell - 2k + 1)} (-2\Delta_{\mathbb{C}^{n-1}}^z)^k \left( \frac{\partial}{\partial z_n} \right)^{\ell - 2k}$$

where  $\nu = \lambda + \ell$  with  $\ell \in \mathbb{N}$

"envoi" les fonctions holomorphes sur la boule de Lie  $n$ -dimensionnelle sur celles définies sur la boule de Lie de dimension  $(n-1)$  en entrelaçant les représentations  $\pi_{\lambda}^{(n)}$  de la Série discrète du groupe conforme  $G = SO_o(n, 2)$  avec celle  $\pi_{\lambda}^{(n-1)}$  du groupe  $G' = SO_o(n-1, 2)$ .

- Q-courbure, Laplaciens supérieurs.
- Distributions automorphes, Opérateurs de Scattering, fonctions zéta locales
- Dualité AdS/CFT.

## Opérateur holomorphe de Juhl

$$D_{\lambda \rightarrow \nu} := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k \Gamma(\ell - k + \lambda - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(\lambda - \frac{n-1}{2} + \lfloor \frac{\ell+1}{2} \rfloor) \Gamma(k+1) \Gamma(\ell - 2k + 1)} (-2\Delta_{\mathbb{C}^{n-1}}^z)^k \left( \frac{\partial}{\partial z_n} \right)^{\ell - 2k}$$

where  $\nu = \lambda + \ell$  with  $\ell \in \mathbb{N}$

"envoi" les fonctions holomorphes sur la boule de Lie  $n$ -dimensionnelle sur celles définies sur la boule de Lie de dimension  $(n-1)$  en entrelaçant les représentations  $\pi_{\lambda}^{(n)}$  de la Série discrète du groupe conforme  $G = SO_o(n, 2)$  avec celle  $\pi_{\lambda}^{(n-1)}$  du groupe  $G' = SO_o(n-1, 2)$ .

- Q-courbure, Laplaciens supérieurs.
- Distributions automorphes, Opérateurs de Scattering, fonctions zéta locales
- Dualité AdS/CFT.

## Opérateur holomorphe de Juhl

$$D_{\lambda \rightarrow \nu} := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k \Gamma(\ell - k + \lambda - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(\lambda - \frac{n-1}{2} + \lfloor \frac{\ell+1}{2} \rfloor) \Gamma(k+1) \Gamma(\ell - 2k + 1)} (-2\Delta_{\mathbb{C}^{n-1}}^z)^k \left( \frac{\partial}{\partial z_n} \right)^{\ell-2k}$$

where  $\nu = \lambda + \ell$  with  $\ell \in \mathbb{N}$

"envoi" les fonctions holomorphes sur la boule de Lie  $n$ -dimensionnelle sur celles définies sur la boule de Lie de dimension  $(n-1)$  en entrelaçant les représentations  $\pi_{\lambda}^{(n)}$  de la Série discrète du groupe conforme  $G = SO_o(n, 2)$  avec celle  $\pi_{\lambda}^{(n-1)}$  du groupe  $G' = SO_o(n-1, 2)$ .

- Q-courbure, Laplaciens supérieurs.
- Distributions automorphes, Opérateurs de Scattering, fonctions zéta locales

- Dualité AdS/CFT.

## Opérateur holomorphe de Juhl

$$D_{\lambda \rightarrow \nu} := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k \Gamma(\ell - k + \lambda - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(\lambda - \frac{n-1}{2} + \lfloor \frac{\ell+1}{2} \rfloor) \Gamma(k+1) \Gamma(\ell - 2k + 1)} (-2\Delta_{\mathbb{C}^{n-1}}^z)^k \left( \frac{\partial}{\partial z_n} \right)^{\ell-2k}$$

where  $\nu = \lambda + \ell$  with  $\ell \in \mathbb{N}$

"envoi" les fonctions holomorphes sur la boule de Lie  $n$ -dimensionnelle sur celles définies sur la boule de Lie de dimension  $(n-1)$  en entrelaçant les représentations  $\pi_{\lambda}^{(n)}$  de la Série discrète du groupe conforme  $G = SO_o(n, 2)$  avec celle  $\pi_{\lambda}^{(n-1)}$  du groupe  $G' = SO_o(n-1, 2)$ .

- Q-courbure, Laplaciens supérieurs.
- Distributions automorphes, Opérateurs de Scattering, fonctions zéta locales
- Dualité AdS/CFT.

- Plusieurs constructions des crochets de Rankin–Cohen :
  - Récurrences .
  - Coefficients de Taylor des formes de Jacobi.
  - Noyaux reproduisants des espaces de Bergman.
  - Correspondance de Howe
  - Covariant connections
  - Projective geometry.
- Transvectants (Überschiebungen), Cayley  $\Omega$ -process.
- Nouvelle approche (T.Kobayashi–M.P. ) : La F-méthode pour la construction des *opérateurs de brisure de symétrie* pour des paires symétriques,  $(G, G')$  basée sur une transformation de Fourier algébrique des modules de Verma généralisés.
- NB. Les crochets de Rankin–Cohen et les opérateurs de Juhl sont des opérateurs différentiels.

- Plusieurs constructions des crochets de Rankin–Cohen :
  - Récurrences .
  - Coefficients de Taylor des formes de Jacobi.
  - Noyaux reproduisants des espaces de Bergman.
  - Correspondance de Howe
  - Covariant connections
  - Projective geometry.
- Transvectants (Überschiebungen), Cayley  $\Omega$ -process.
- Nouvelle approche (T.Kobayashi–M.P. ) : La F-méthode pour la construction des *opérateurs de brisure de symétrie* pour des paires symétriques,  $(G, G')$  basée sur une transformation de Fourier algébrique des modules de Verma généralisés.
- NB. Les crochets de Rankin–Cohen et les opérateurs de Juhl sont des opérateurs différentiels.

- Plusieurs constructions des crochets de Rankin–Cohen :
  - Récurrences .
  - Coefficients de Taylor des formes de Jacobi.
  - Noyaux reproduisants des espaces de Bergman.
  - Correspondance de Howe
  - Covariant connections
  - Projective geometry.
- Transvectants (Überschiebungen), Cayley  $\Omega$ -process.
- Nouvelle approche (T.Kobayshi–M.P. ) : La F-méthode pour la construction des *opérateurs de brisure de symétrie* pour des paires symétriques,  $(G, G')$  basée sur une transformation de Fourier algébrique des modules de Verma généralisés.

• NB. Les crochets de Rankin–Cohen et les opérateurs de Juhl sont des opérateurs différentiels.

- Plusieurs constructions des crochets de Rankin–Cohen :
  - Récurrences .
  - Coefficients de Taylor des formes de Jacobi.
  - Noyaux reproduisants des espaces de Bergman.
  - Correspondance de Howe
  - Covariant connections
  - Projective geometry.
- Transvectants (Überschiebungen), Cayley  $\Omega$ -process.
- Nouvelle approche (T.Kobayshi–M.P. ) : La F-méthode pour la construction des *opérateurs de brisure de symétrie* pour des paires symétriques,  $(G, G')$  basée sur une transformation de Fourier algébrique des modules de Verma généralisés.
- NB. Les crochets de Rankin–Cohen et les opérateurs de Juhl sont des opérateurs différentiels.

# Les crochets de Rankin–Cohen

Cassification complète de tous les opérateurs différentiels holomorphes covariants dans 6 géométries paraboliques différentes  $Y \hookrightarrow X$  :

1.  $\mathbb{P}^n\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C} \times \mathbb{P}^n\mathbb{C}$
2.  $\text{LGr}(\mathbb{C}^{2n-2}) \times \text{LGr}(\mathbb{C}^2) \hookrightarrow \text{LGr}(\mathbb{C}^{2n})$
3.  $\mathbb{Q}^n\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{Q}^{n+1}\mathbb{C}$
4.  $\text{Gr}_{p-1}(\mathbb{C}^{p+q}) \hookrightarrow \text{Gr}_p(\mathbb{C}^{p+q})$
5.  $\mathbb{P}^n\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{Q}^{2n}\mathbb{C}$
6.  $\text{IGr}_{n-1}(\mathbb{C}^{2n-2}) \hookrightarrow \text{IGr}_n(\mathbb{C}^{2n})$

# Les crochets de Rankin–Cohen

Cassification complète de tous les opérateurs différentiels holomorphes covariants dans 6 géométries paraboliques différentes  $Y \hookrightarrow X$  :

- |    |   |    |   |
|----|---|----|---|
| 1. | $\mathbb{P}^n\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C} \times \mathbb{P}^n\mathbb{C}$                     | 4. | $\mathrm{Gr}_{p-1}(\mathbb{C}^{p+q}) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_p(\mathbb{C}^{p+q})$   |
| 2. | $\mathrm{LGr}(\mathbb{C}^{2n-2}) \times \mathrm{LGr}(\mathbb{C}^2) \hookrightarrow \mathrm{LGr}(\mathbb{C}^{2n})$ | 5. | $\mathbb{P}^n\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{Q}^{2n}\mathbb{C}$                      |
| 3. | $\mathbb{Q}^n\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{Q}^{n+1}\mathbb{C}$   | 6. | $\mathrm{IGr}_{n-1}(\mathbb{C}^{2n-2}) \hookrightarrow \mathrm{IGr}_n(\mathbb{C}^{2n})$ |

Ce qui correspond aux 6 paires symétriques  $(G, G')$  :

- |    |   |    |  |
|----|---|----|--|
| 1. | $(U(n, 1) \times U(n, 1), U(n, 1))$                                 | 4. | $(SU(p, q), S(U(1) \times U(p-1, q)))$ |
| 2. | $(Sp(n, \mathbb{R}), Sp(n-1, \mathbb{R}) \times Sp(1, \mathbb{R}))$ | 5. | $(SO(2, 2n), U(n, 1))$                 |
| 3. | $(SO(n, 2), SO(n-1, 2))$  | 6. | $(SO^*(2n), SO(2) \times SO^*(2n-2))$  |

# Les crochets de Rankin–Cohen

Cassification complète de tous les opérateurs différentiels holomorphes covariants dans 6 géométries paraboliques différentes  $Y \hookrightarrow X$  :

- |    |   |    |   |
|----|---|----|---|
| 1. | $\mathbb{P}^n\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C} \times \mathbb{P}^n\mathbb{C}$                     | 4. | $\mathrm{Gr}_{p-1}(\mathbb{C}^{p+q}) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_p(\mathbb{C}^{p+q})$   |
| 2. | $\mathrm{LGr}(\mathbb{C}^{2n-2}) \times \mathrm{LGr}(\mathbb{C}^2) \hookrightarrow \mathrm{LGr}(\mathbb{C}^{2n})$ | 5. | $\mathbb{P}^n\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{Q}^{2n}\mathbb{C}$                      |
| 3. | $\mathbb{Q}^n\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{Q}^{n+1}\mathbb{C}$   | 6. | $\mathrm{IGr}_{n-1}(\mathbb{C}^{2n-2}) \hookrightarrow \mathrm{IGr}_n(\mathbb{C}^{2n})$ |

Ce qui correspond aux 6 paires symétriques  $(G, G')$  :

- |    |   |    |  |
|----|---|----|--|
| 1. | $(U(n, 1) \times U(n, 1), U(n, 1))$                                 | 4. | $(SU(p, q), S(U(1) \times U(p-1, q)))$ |
| 2. | $(Sp(n, \mathbb{R}), Sp(n-1, \mathbb{R}) \times Sp(1, \mathbb{R}))$ | 5. | $(SO(2, 2n), U(n, 1))$                 |
| 3. | $(SO(n, 2), SO(n-1, 2))$  | 6. | $(SO^*(2n), SO(2) \times SO^*(2n-2))$  |

**Théorème. T. Kobayashi, M.P. 2016**

- (1) Tout opérateur  $G'$ -équivariant de  $\mathcal{O}(X, \mathcal{L}_\lambda)$  dans  $\mathcal{O}(Y, \mathcal{W})$  est donné par des dérivées normales par rapport au plongement équivariant  $Y \hookrightarrow X$  du type (4), (5) or (6).
- (2) Aucune des dérivées normales d'ordre positif ne correspond à un opérateur de  $G'$ -entrelacement pour  $Y \hookrightarrow X$  du type (1), (2) and (3).

# Idée de la F-méthode

$G$  et  $G'$  agissent transitivement sur  $X = G/H, Y = G'/H'$ .

# Idée de la F-méthode

$G$  et  $G'$  agissent transitivement sur  $X = G/H$ ,  $Y = G'/H'$ .

## Théorème de Dualité (T.Kobayashi - M.P. )

Soit  $H' \subset H$  des sous-groupes fermés d'un groupe de Lie  $G$  et  $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$  leurs algèbres de Lie respectives. Soit  $V$  et  $W$  des représentations de dimension finie de  $H$  et de  $H'$ , resp. Soit  $G'$  un sous-groupe de  $G$  contenant  $H'$ , et  $\mathcal{V}_X := G \times_H V$  et  $\mathcal{W}_Y := G' \times_{H'} W$  les fibrés vectoriels homogènes correspondants. Alors il existe un isomorphisme linéaire naturel :

$$D_{X \rightarrow Y} : \text{Hom}_{H'}(W^\vee, \text{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee)) \xrightarrow{\sim} \text{Diff}_{G'}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y), \quad (1)$$

où  $\text{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(V) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} V$  est un  $U(\mathfrak{g})$ -module induit.

# Idée de la F-méthode

$G$  et  $G'$  agissent transitivement sur  $X = G/H$ ,  $Y = G'/H'$ .

## Théorème de Dualité (T.Kobayashi - M.P. )

Soit  $H' \subset H$  des sous-groupes fermés d'un groupe de Lie  $G$  et  $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$  leurs algèbres de Lie respectives. Soit  $V$  et  $W$  des représentations de dimension finie de  $H$  et de  $H'$ , resp. Soit  $G'$  un sous-groupe de  $G$  contenant  $H'$ , et  $\mathcal{V}_X := G \times_H V$  et  $\mathcal{W}_Y := G' \times_{H'} W$  les fibrés vectoriels homogènes correspondants. Alors il existe un isomorphisme linéaire naturel :

$$D_{X \rightarrow Y} : \text{Hom}_{H'}(W^\vee, \text{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee)) \xrightarrow{\sim} \text{Diff}_{G'}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y), \quad (1)$$

où  $\text{ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(V) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} V$  est un  $U(\mathfrak{g})$ -module induit.

## Théorème de Localité (T.Kobayashi - M.P. )

Tout  $G'$ -homomorphisme de  $\mathcal{O}(G/K, \mathcal{V})$  dans  $\mathcal{O}(G'/K', \mathcal{W})$  est donné par un opérateur différentiel holomorphe

$$\text{Diff}_{G'}^{\text{hol}}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y) = \text{Hom}_{G'}(\mathcal{O}(G/K, \mathcal{V}), \mathcal{O}(G'/K', \mathcal{W}));$$

# Idée de la F-méthode

La transformation de Fourier algébrique :

$$F_c : \text{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^{\vee}) \xrightarrow{\sim} \text{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes V^{\vee}.$$

est définie par des  $\mathfrak{g}$ -isomorphismes :

$$F_c : \text{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^{\vee}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_{[0]}(G/P, \mathcal{V}_{2\rho}^{\vee}) \xrightarrow{\text{Bruhat}} \mathcal{E}'_{[0]}(\mathfrak{n}_-(\mathbb{R}), V^{\vee}) \xrightarrow{\sim} \text{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes V^{\vee}.$$

La transformation de Fourier algébrique :

$$F_c : \text{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^{\vee}) \xrightarrow{\sim} \text{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes V^{\vee}.$$

est définie par des  $\mathfrak{g}$ -isomorphismes :

$$F_c : \text{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^{\vee}) \xrightarrow{dL} \mathcal{E}'_{[0]}(G/P, \mathcal{V}_{2\rho}^{\vee}) \xrightarrow{\text{Bruhat}} \mathcal{E}'_{[0]}(\mathfrak{n}_-(\mathbb{R}), V^{\vee}) \xrightarrow{F_c \otimes \text{id}} \text{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes V^{\vee}.$$

**Theorem A (T. Kobayashi – M.P. 2016)**

Il existe un isomorphisme naturel

$$\begin{aligned} \text{Diff}_{G'}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y) &\simeq (\text{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W))^{L', \widehat{d\pi}_{\mu}(\mathfrak{n}'_+)} \\ &\simeq (\text{Hom}_{L'}(V \otimes \text{Pol}(\mathfrak{n}_+), W))^{\widehat{d\pi}_{\mu}(\mathfrak{n}'_+)}. \end{aligned} \tag{2}$$

## Theorem A (T. Kobayashi – M.P. )

Il existe un isomorphisme naturel

$$\begin{aligned}\mathrm{Diff}_{G'}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y) &\simeq (\mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W))^{L', \widehat{d\pi}_\mu(\mathfrak{n}'_+)} \\ &\simeq (\mathrm{Hom}_{L'}(V \otimes \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+), W))^{\widehat{d\pi}_\mu(\mathfrak{n}'_+)}.\end{aligned}$$

## Theorem A (T. Kobayashi – M.P. )

Il existe un isomorphisme naturel

$$\begin{aligned} \text{Diff}_{G'}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y) &\simeq (\text{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W))^{L', \widehat{d\pi}_\mu(\mathfrak{n}'_+)} \\ &\simeq (\text{Hom}_{L'}(V \otimes \text{Pol}(\mathfrak{n}_+), W))^{\widehat{d\pi}_\mu(\mathfrak{n}'_+)}. \end{aligned}$$

## Theorem B (T. Kobayashi – M.P. )

Si  $\mathfrak{p}$  est  $\mathfrak{g}'$ -compatible et son nilradical est abélien alors le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W^\vee, \text{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee)) & \xrightarrow{F_c \otimes \text{id}} & \text{Pol}(\mathfrak{n}_+) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) & \xleftarrow{\text{Symb} \otimes \text{id}} & \text{Diff}^c(\mathfrak{n}_-) \otimes \text{Hom}(V, W) \\ \cup & & \circlearrowleft & & \cup \\ \text{Hom}_{\mathfrak{p}'}(W^\vee, \text{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}}(V^\vee)) & & \xrightarrow[\text{D}_{X \rightarrow Y}]{} & & \text{Diff}_{G'}(\mathcal{V}_X, \mathcal{W}_Y). \end{array}$$

**Théorème C1 :  $(U(n, 1) \times U(n, 1), U(n, 1))$**

$$D_{X \rightarrow Y, a} := P_a^{\lambda' - 1, -\lambda' - \lambda'' - 2a + 1} \left( \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right)$$

entrelace  $\mathcal{O}(Y, \mathcal{L}_{(\lambda'_1, \lambda'_2)}) \otimes \mathcal{O}(Y, \mathcal{L}_{(\lambda''_1, \lambda''_2)})$  et  $\mathcal{O}(Y, \mathcal{W}_{(\lambda'_1 + \lambda''_1, \lambda'_2 + \lambda''_2)}^a)$ , où  $\lambda'_1, \lambda''_1, \lambda'_2, \lambda''_2 \in \mathbb{Z}$ ,  
 $\lambda' = \lambda'_1 - \lambda'_2$ ,  $\lambda'' = \lambda''_1 - \lambda''_2$ ,  $a \in \mathbb{N}$  et

$$P_\ell^{\alpha, \beta}(x, y) := y^\ell P_\ell^{\alpha, \beta} \left( 2 \frac{x}{y} + 1 \right).$$

**Théorème C1 :  $(U(n, 1) \times U(n, 1), U(n, 1))$**

$$D_{X \rightarrow Y, a} := P_a^{\lambda' - 1, -\lambda' - \lambda'' - 2a + 1} \left( \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right)$$

entrelace  $\mathcal{O}(Y, \mathcal{L}_{(\lambda'_1, \lambda'_2)}) \otimes \mathcal{O}(Y, \mathcal{L}_{(\lambda''_1, \lambda''_2)})$  et  $\mathcal{O}(Y, \mathcal{W}_{(\lambda'_1 + \lambda''_1, \lambda'_2 + \lambda''_2)}^a)$ , où  $\lambda'_1, \lambda''_1, \lambda'_2, \lambda''_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda' = \lambda'_1 - \lambda'_2$ ,  $\lambda'' = \lambda''_1 - \lambda''_2$ ,  $a \in \mathbb{N}$  et

$$P_\ell^{\alpha, \beta}(x, y) := y^\ell P_\ell^{\alpha, \beta} \left( 2 \frac{x}{y} + 1 \right).$$

**Théorème C2 :  $(SO(n, 2), SO(n - 1, 2))$**

$$D_{X \rightarrow Y, a} := C_a^{\lambda - \frac{n-1}{2}} \left( -\Delta_{\mathbb{C}^{n-1}}, \frac{\partial}{\partial z_n} \right)$$

entrelace  $\mathcal{O}(X, \mathcal{L}_\lambda)$  et  $\mathcal{O}(Y, \mathcal{L}_{\lambda+a})$ , où  $\lambda \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{N}$ .

**Théorème C1 :  $(U(n, 1) \times U(n, 1), U(n, 1))$**

$$D_{X \rightarrow Y, a} := P_a^{\lambda' - 1, -\lambda' - \lambda'' - 2a + 1} \left( \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right)$$

entrelace  $\mathcal{O}(Y, \mathcal{L}_{(\lambda'_1, \lambda'_2)}) \otimes \mathcal{O}(Y, \mathcal{L}_{(\lambda''_1, \lambda''_2)})$  et  $\mathcal{O}(Y, \mathcal{W}_{(\lambda'_1 + \lambda''_1, \lambda'_2 + \lambda''_2)}^a)$ , où  $\lambda'_1, \lambda''_1, \lambda'_2, \lambda''_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda' = \lambda'_1 - \lambda'_2$ ,  $\lambda'' = \lambda''_1 - \lambda''_2$ ,  $a \in \mathbb{N}$  et

$$P_\ell^{\alpha, \beta}(x, y) := y^\ell P_\ell^{\alpha, \beta} \left( 2 \frac{x}{y} + 1 \right).$$

**Théorème C2 :  $(SO(n, 2), SO(n - 1, 2))$**

$$D_{X \rightarrow Y, a} := C_a^{\lambda - \frac{n-1}{2}} \left( -\Delta_{\mathbb{C}^{n-1}}, \frac{\partial}{\partial z_n} \right)$$

entrelace  $\mathcal{O}(X, \mathcal{L}_\lambda)$  et  $\mathcal{O}(Y, \mathcal{L}_{\lambda+a})$ , où  $\lambda \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{N}$ .

Soit  $\Psi_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} : \mathcal{O}(\Pi) \longrightarrow \mathcal{O}(\Pi \times \Pi)$  donné par

$$\begin{aligned} \left( \Psi_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} g \right) (\zeta_1, \zeta_2) &:= \frac{(\zeta_1 - \zeta_2)^\ell}{2^{\lambda' + \lambda'' + 2\ell - 1} \ell!} \times \\ &\int_{-1}^1 g \left( \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)v + (\zeta_1 + \zeta_2)}{2} \right) (1 - v)^{\lambda' + \ell - 1} (1 + v)^{\lambda'' + \ell - 1} dv. \end{aligned}$$

où,  $\lambda', \lambda'', \lambda''' \in \mathbb{C}$  such that  $\ell := \frac{1}{2}(\lambda''' - \lambda' - \lambda'') \in \mathbb{N}$  et  $\operatorname{Re}(\lambda' + \ell) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\lambda'' + \ell) > 0$ .

Soit  $\Psi_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} : \mathcal{O}(\Pi) \longrightarrow \mathcal{O}(\Pi \times \Pi)$  donné par

$$\begin{aligned} (\Psi_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} g)(\zeta_1, \zeta_2) &:= \frac{(\zeta_1 - \zeta_2)^\ell}{2^{\lambda' + \lambda'' + 2\ell - 1} \ell!} \times \\ &\int_{-1}^1 g\left(\frac{(\zeta_2 - \zeta_1)v + (\zeta_1 + \zeta_2)}{2}\right) (1-v)^{\lambda' + \ell - 1} (1+v)^{\lambda'' + \ell - 1} dv. \end{aligned}$$

où,  $\lambda', \lambda'', \lambda''' \in \mathbb{C}$  such that  $\ell := \frac{1}{2}(\lambda''' - \lambda' - \lambda'') \in \mathbb{N}$  et  $\operatorname{Re}(\lambda' + \ell) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\lambda'' + \ell) > 0$ .

**Théorème, T. Kobayashi, M.P. 2020**

- (1) L'application  $\Psi_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} : \mathcal{O}(\Pi) \longrightarrow \mathcal{O}(\Pi \times \Pi)$  entrelace l'action de  $SL(2, \mathbb{R})^\sim$  par  $\pi_{\lambda'''}$  avec le produit tensoriel  $\pi_{\lambda'} \widehat{\otimes} \pi_{\lambda''}$ .
- (2) De plus, si  $\lambda'$  et  $\lambda''$  sont réels supérieurs à 1,  $\Psi_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''}$  induit un plongement isométrique des espaces de Bergman :  $\mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda'''} \longrightarrow \mathcal{H}^2(\Pi \times \Pi)_{(\lambda', \lambda'')}$ .

L'image de l'opérateur holographique  $\Psi_{\lambda', \lambda''}^{\lambda''''}$  est caractérisé par une équation différentielle du second ordre sur  $\Pi \times \Pi$ .

Pour  $\lambda', \lambda'' > 1$ , l'opérateur  $\Psi_{\lambda', \lambda''}^{\lambda''''}$  est un multiple de l'adjoint  $(\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}^{\lambda''''})^*$  de l'opérateur bi-différentiel de Rankin–Cohen  $\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}^{\lambda''''}$ .

# Transformation de Rankin–Cohen

## Transformation de Rankin–Cohen

For  $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{C}$ , the *la Transformation de Rankin–Cohen*  $\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}$  est une application linéaire

$$\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}: \mathcal{O}(\Pi \times \Pi) \longrightarrow \text{Map}(\mathbb{N}, \mathcal{O}(\Pi)), \quad f \mapsto (\ell \mapsto \mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}(f)_\ell)$$

définie par  $(\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}(f))_\ell := \mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}^{\lambda' + \lambda'' + 2\ell} f$  pour  $\ell \in \mathbb{N}$ .

# Transformation de Rankin–Cohen

## Transformation de Rankin–Cohen

For  $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{C}$ , the *la Transformation de Rankin–Cohen*  $\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}$  est une application linéaire

$$\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}: \mathcal{O}(\Pi \times \Pi) \longrightarrow \text{Map}(\mathbb{N}, \mathcal{O}(\Pi)), \quad f \mapsto (\ell \mapsto \mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}(f)_\ell)$$

définie par  $(\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}(f))_\ell := \mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}^{\lambda' + \lambda'' + 2\ell} f$  pour  $\ell \in \mathbb{N}$ .

## Inversion de la Transformation de Rankin–Cohen

Soit  $\lambda', \lambda'' > 1$ . Alors pour tout  $f \in \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda'} \widehat{\otimes} \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda''}$  on a

$$f = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{c_\ell(\lambda', \lambda'')} \Psi_{\lambda', \lambda''}^{\lambda' + \lambda'' + 2\ell} (\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}(f))_\ell.$$

où  $c_\ell(\lambda', \lambda'') = \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \int_{-1}^1 |P_\ell^{\alpha, \beta}(v)|^2 (1-v)^\alpha (1+v)^\beta dv = \frac{\Gamma(\lambda'+\ell)\Gamma(\lambda''+\ell)}{(\lambda'+\lambda''+2\ell-1)\Gamma(\lambda'+\lambda''+\ell-1)\ell!}$

# Théorème de Parseval–Plancherel pour la Transformation de Rankin–Cohen

Soit  $\lambda', \lambda'' > 1$ .

- (1) Transformation de Rankin–Cohen  $\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}$  induit un opérateur unitaire  $SL(2, \mathbb{R})$ -équivalent

$$\mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda'} \widehat{\otimes} \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda''} \xrightarrow{\sim} \sum_{\ell \in \mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda' + \lambda'' + 2\ell}.$$

Ainsi, pour tout  $f \in \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda'} \widehat{\otimes} \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda''}$ ,

$$\begin{aligned} & \|f\|_{\mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda'} \widehat{\otimes} \mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda''}}^2 \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r_{\ell}(\lambda', \lambda'') c_{\ell}(\lambda', \lambda'')} \left\| (\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}(f))_{\ell} \right\|_{\mathcal{H}^2(\Pi)_{\lambda' + \lambda'' + 2\ell}}^2. \end{aligned}$$

$$\text{où } r_{\ell} \equiv r_{\ell}(\lambda', \lambda'') = \frac{b(\lambda''')}{b(\lambda')b(\lambda'')} = \frac{\Gamma(\lambda' + \lambda'' + 2\ell - 1)}{2^{2\ell + 2} \pi \Gamma(\lambda' - 1) \Gamma(\lambda'' - 1)}.$$

# Pourquoi ?

La transformation de Fourier–Laplace  $\mathcal{F}: F \mapsto \mathcal{F}F(\zeta) := \int_0^\infty F(z)e^{i\zeta z} dz$ , est une isométrie de  $L^2(\mathbb{R}_+, x^{1-\lambda} dx)$  sur  $\mathcal{H}^2(\Pi)_\lambda$  (à une renormalisation près).

# Pourquoi ?

La transformation de Fourier–Laplace  $\mathcal{F}: F \mapsto \mathcal{F}F(\zeta) := \int_0^\infty F(z)e^{i\zeta z} dz$ , est une isométrie de  $L^2(\mathbb{R}_+, x^{1-\lambda} dx)$  sur  $\mathcal{H}^2(\Pi)_\lambda$  (à une renormalisation près).

$$\widehat{\mathcal{RC}}_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} := \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} \circ \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}.$$

$$\widehat{\Psi}_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} := \mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{F}^{-1} \circ \Psi_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} \circ \mathcal{F}.$$

# Pourquoi ?

La transformation de Fourier–Laplace  $\mathcal{F}: F \mapsto \mathcal{F}F(\zeta) := \int_0^\infty F(z)e^{i\zeta z} dz$ , est une isometrie de  $L^2(\mathbb{R}_+, x^{1-\lambda} dx)$  sur  $\mathcal{H}^2(\Pi)_\lambda$  (à une renormalisation près).

$$\widehat{\mathcal{R}\mathcal{C}}^{\lambda'''} := \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{R}\mathcal{C}^{\lambda'''} \circ \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}.$$

$$\widehat{\Psi}^{\lambda'''} := \mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{F}^{-1} \circ \Psi^{\lambda'''} \circ \mathcal{F}.$$

Le diagramme commutatif suivant résume les définitions :

$$\begin{array}{ccc}
 L^2(\mathbb{R}_+^2, x^{1-\lambda'} y^{1-\lambda''} dx dy) & \xrightarrow{\mathcal{F}_2} & \mathcal{H}_{\lambda'}^2(\Pi) \widehat{\otimes} \mathcal{H}_{\lambda''}^2(\Pi) \\
 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mathcal{R}^{\lambda'''}_{\lambda', \lambda''} \\
 L^2(\mathbb{R}_+^2, x^{1-\lambda'} y^{1-\lambda''} dx dy) & \xrightarrow{\mathcal{F}_2} & \mathcal{H}_{\lambda'}^2(\Pi) \widehat{\otimes} \mathcal{H}_{\lambda''}^2(\Pi) \\
 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{Rest} \\
 L^2(\mathbb{R}_+, z^{1-\lambda'''} dz) & \xrightarrow{\mathcal{F}_1} & \mathcal{H}_{\lambda'''}^2(\Pi)
 \end{array}$$

$\widehat{\mathcal{R}\mathcal{C}}^{\lambda'''} : L^2(\mathbb{R}_+^2, x^{1-\lambda'} y^{1-\lambda''} dx dy) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+, z^{1-\lambda'''} dz)$   
 $\mathcal{R}\mathcal{C}^{\lambda'''} : \mathcal{H}_{\lambda'}^2(\Pi) \widehat{\otimes} \mathcal{H}_{\lambda''}^2(\Pi) \rightarrow \mathcal{H}_{\lambda'''}^2(\Pi)$

$$\begin{array}{ccc}
 L^2(\mathbb{R}_+^2, x^{1-\lambda'} y^{1-\lambda''} dx dy) & \xrightarrow{\mathcal{F}_2} & \mathcal{H}_{\lambda'}^2(\Pi) \widehat{\otimes} \mathcal{H}_{\lambda''}^2(\Pi) \\
 \widehat{\Psi}_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \Psi_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} (= c'' (\mathcal{R}C_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''})^*) \\
 L^2(\mathbb{R}_+, z^{1-\lambda'''} dz) & \xrightarrow{\mathcal{F}_1} & \mathcal{H}_{\lambda'''}^2(\Pi)
 \end{array}$$

où

$$\left( \widehat{\Psi}_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} h \right) (x, y) := c \frac{x^{\lambda'-1} y^{\lambda''-1}}{(x+y)^{\lambda'+\lambda''+\ell-1}} P_\ell^{\lambda'-1, \lambda''-1} \left( \frac{y-x}{x+y} \right) \cdot h(x+y).$$

et  $P_\ell^{\alpha, \beta}(x)$  est le polynôme de Jacobi de degré  $\ell$ .

Théorème C1.

$$\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} = \text{Rest} \circ \tilde{P}_\ell^{\lambda'-1, \lambda''-1} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \right),$$

$$\text{où } \tilde{P}_\ell^{\alpha, \beta}(x, y) = (-1)^\ell (x+y)^\ell P_\ell^{\alpha, \beta} \left( \frac{y-x}{x+y} \right) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{(-1)^{\ell-j} (\alpha+\beta+\ell+1)_j (\alpha+j+1)_{\ell-j}}{(\ell-j)! j!} (x+y)^{\ell-j} x^j.$$

Branchement des reps. de la série discrète hol.  $\pi_\lambda^{(n)}$  de  $G = SO_o(2, n)$  à  $G' = SO_o(2, n-1)$  réalisé dans les espaces de Bergman du domaine de type tube  $T_{\Omega(n)} := \mathbb{R}^n + i\Omega(n)$  qui est biholomorphe au domaine symétrique borné de type  $IV_n$  (boule de Lie) où  $\Omega(n) := \{\eta \in \mathbb{R}^n : Q_{1,n-1}(\eta) > 0, \eta_1 > 0\}$ .

Branchement des reps. de la série discrète hol.  $\pi_\lambda^{(n)}$  de  $G = SO_o(2, n)$  à  $G' = SO_o(2, n-1)$  réalisé dans les espaces de Bergman du domaine de type tube  $T_{\Omega(n)} := \mathbb{R}^n + i\Omega(n)$  qui est biholomorphe au domaine symétrique borné de type  $IV_n$  (boule de Lie) où  $\Omega(n) := \{\eta \in \mathbb{R}^n : Q_{1, n-1}(\eta) > 0, \eta_1 > 0\}$ .

Soit  $(I_\ell C_\ell^\alpha)(u, v) := \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} a_k(\ell, \alpha) u^k v^{\ell-2k}$ . Alors, les OBS pour la loi de branchement

$$\pi_\lambda^{(n)}|_{\tilde{G}'} \simeq \sum_{\ell \in \mathbb{N}}^{\oplus} \pi_{\lambda+\ell}^{(n-1)}.$$

sont les opérateurs de Juhl holomorphes (Théorème C2) :

$$\mathcal{D}_\ell^\alpha = i^{-\ell} (I_\ell C_\ell^\alpha) \left( -\Delta_{\mathbb{C}^{1, n-2}}, i \frac{\partial}{\partial \zeta_n} \right).$$

# Cas Conforme

Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ , la transformation  $D_\lambda$  est une collection des

$$D_\lambda: \mathcal{O}(T_{\Omega(n)}) \longrightarrow \text{Map}(\mathbb{N}, \mathcal{O}(T_{\Omega(n-1)})), \quad f \mapsto \{(D_\lambda f)_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}},$$

où  $(D_\lambda f)_\ell := D_{\lambda \rightarrow \lambda + \ell} f$ .

# Cas Conforme

Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ , la transformation  $D_\lambda$  est une collection des

$$D_\lambda: \mathcal{O}(T_{\Omega(n)}) \longrightarrow \text{Map}(\mathbb{N}, \mathcal{O}(T_{\Omega(n-1)})), \quad f \mapsto \{(D_\lambda f)_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}},$$

où  $(D_\lambda f)_\ell := D_{\lambda \rightarrow \lambda + \ell} f$ . Elle entrelace  $(\pi_\lambda^{(n)}, \mathcal{O}(T_{\Omega(n)}))$  avec la somme directe formelle  $\widehat{\bigoplus}_{\ell \in \mathbb{N}} (\pi_{\lambda + \ell}^{(n-1)}, \mathcal{O}(T_{\Omega(n-1)}))$ ;

Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ , la transformation  $D_\lambda$  est une collection des

$$D_\lambda: \mathcal{O}(T_{\Omega(n)}) \longrightarrow \text{Map}(\mathbb{N}, \mathcal{O}(T_{\Omega(n-1)})), \quad f \mapsto \{(D_\lambda f)_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}},$$

où  $(D_\lambda f)_\ell := D_{\lambda \rightarrow \lambda + \ell} f$ . Elle entrelace  $(\pi_\lambda^{(n)}, \mathcal{O}(T_{\Omega(n)}))$  avec la somme directe formelle  $\widehat{\bigoplus}_{\ell \in \mathbb{N}} (\pi_{\lambda + \ell}^{(n-1)}, \mathcal{O}(T_{\Omega(n-1)}))$ ;

**Théorème.** T.Kobayashi, M.P. 2020.

Soit  $\lambda > n - 1$ .

(1) (*Formule d'inversion*). Tout  $f \in \mathcal{H}^2(T_{\Omega(n)})_\lambda$  peut être obtenue à partir de  $D_\lambda f$  par

$$f = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r_\ell(\lambda) c_\ell(\lambda)} D_{\lambda \rightarrow \lambda + \ell}^* (D_\lambda f)_\ell.$$

(2) (*Parseval–Plancherel*). Pour tout  $f \in \mathcal{H}^2(T_{\Omega(n)})_\lambda$ , on a

$$\|f\|_{\mathcal{H}_\lambda^2(T_{\Omega(n)})}^2 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r_\ell(\lambda) c_\ell(\lambda)} \|(D_\lambda f)_\ell\|_{\mathcal{H}_{\lambda + \ell}^2(T_{\Omega(n-1)})}^2.$$

L'opérateur adjoint est donné par :

$$(D_{\lambda \rightarrow \nu}^* g)(\zeta) = C \int_{T\Omega(n-1)} K_{\lambda, \nu}(\zeta, \tau') g(\tau') d\mu_\nu(\tau'),$$

où

$$K_{\lambda, \nu}(\zeta, \tau') := \frac{((\zeta_1 - \bar{\tau}_1)^2 - (\zeta_2 - \bar{\tau}_2)^2 - \dots - (\zeta_{n-1} - \bar{\tau}_{n-1})^2 - \zeta_n^2)^{-\nu}}{\zeta_n^{\lambda - \nu}}.$$

L'opérateur adjoint est donné par :

$$(D_{\lambda \rightarrow \nu}^* g)(\zeta) = C \int_{T\Omega(n-1)} K_{\lambda, \nu}(\zeta, \tau') g(\tau') d\mu_\nu(\tau'),$$

où

$$K_{\lambda, \nu}(\zeta, \tau') := \frac{((\zeta_1 - \bar{\tau}_1)^2 - (\zeta_2 - \bar{\tau}_2)^2 - \dots - (\zeta_{n-1} - \bar{\tau}_{n-1})^2 - \zeta_n^2)^{-\nu}}{\zeta_n^{\lambda - \nu}}.$$

De plus,

$$\begin{array}{ll} \widehat{D}_{\lambda \rightarrow \nu}: L^2(\Omega(n))_\lambda & \longrightarrow L^2(\Omega(n-1))_\nu & \text{Transformation de Fourier de } D_{\lambda \rightarrow \nu}, \\ \Phi_\lambda^\nu: L^2(\Omega(n-1))_\nu & \longrightarrow L^2(\Omega(n))_\lambda & \text{Opérateur holographique.} \end{array}$$

Plus précisément,

$$(\widehat{D}_{\lambda \rightarrow \nu} F)(y') = i^{-\ell} Q_{1, n-2}(y')^{\frac{\ell+1}{2}} \int_{-1}^1 F \circ \iota(y', \nu) C_{\ell}^{\alpha}(\nu) d\nu \quad \text{pour } y' \in \Omega',$$

où  $\alpha = \lambda - \frac{n-1}{2}$  et

$$\iota: \Omega(n-1) \times (-1, 1) \xrightarrow{\sim} \Omega(n), \quad (y', \nu) \mapsto (y', -\sqrt{Q_{1, n-2}(y')} \nu),$$

Plus précisément,

$$(\widehat{D}_{\lambda \rightarrow \nu} F)(y') = i^{-\ell} Q_{1,n-2}(y')^{\frac{\ell+1}{2}} \int_{-1}^1 F \circ \iota(y', \nu) C_{\ell}^{\alpha}(\nu) d\nu \quad \text{pour } y' \in \Omega',$$

où  $\alpha = \lambda - \frac{n-1}{2}$  et

$$\iota: \Omega(n-1) \times (-1, 1) \xrightarrow{\sim} \Omega(n), \quad (y', \nu) \mapsto (y', -\sqrt{Q_{1,n-2}(y')} \nu),$$

$$(\Phi_{\lambda}^{\nu} h)(y) := Q_{1,n-2}(y')^{-(\ell+\frac{1}{2})} (1-y_n^2)^{\lambda-\frac{n}{2}} (I_{\ell} C_{\ell}^{\alpha})(Q_{1,n-2}(y'), -y_n) h(y').$$

# Conclusion

La résolution des Problèmes A et B passe par la recherche des descriptions et formules explicites pour :

- le support de  $\Lambda$  ;
- les opérateurs diff. holomorphes  $D_\ell$  ;
- la norme d'opérateurs  $\|D_\ell\|_{\text{op}}$  ;
- l'opérateur adjoint  $D_\ell^*$ .

# Conclusion

La résolution des Problèmes A et B passe par la recherche des descriptions et formules explicites pour :

- le support de  $\Lambda$  ;
- les opérateurs diff. holomorphes  $D_\ell$  ;
- la norme d'opérateurs  $\|D_\ell\|_{\text{op}}$  ;
- l'opérateur adjoint  $D_\ell^*$ .

Lien entre “les polynômes orthogonaux ”  $\{P_\ell\}$  et les OBS  $\{R_\ell\}$  via la F-méthode :

$R_\lambda$

Crochets de Rankin–Cohen

$$RC_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''}$$

Op. Diff. Cov. de Juhl

$$D_{\lambda \rightarrow \nu}$$

$P_\lambda$

Polynômes de Jacobi

$$P_\ell^{\alpha, \beta}(z)$$

Polynômes de Gegenbauer

$$C_\ell^\alpha(z)$$

OBS $\{R_\ell\}$	Polynômes orthogonaux $\{P_\ell\}$
$G'$ -équivariance	EDO hypergéométrique
Norme de l'opérateur $R_\ell$	Norme $L^2$ du polynôme $P_\ell$
loi de branchement pour $\pi _{G'}$	$L^2$ -complétude de $\{P_\ell\}$
Transf. holographique (modèle $L^2$ )	Transf. intégrale associée à $\{P_\ell\}$ et à la foliation du cône symétrique. <sup>1</sup>

1. idée développée dans la thèse de Quentin Labriet (déc. 2021)