Le cône de Horn associé aux valeurs propres symplectiques

Paul-Emile Paradan

Université de Montpellier, France

Journées SL2R, IECL-Nancy
13 mai 2022

Plan de l'exposé

1. Valeurs propres symplectiques
2. Problèmes de Horn
   - Le cadre classique
   - Le résultat principal
3. Classique versus Quantique
4. Le cône causal de $\mathfrak{sp}(\mathbb{R}^{2n})$
5. La série discrète holomorphe du groupe symplectique
   - Produit tensoriel
   - La quantification commute à la réduction
   - Un résultat de H.P. Jakobsen et M. Vergne
6. Réduction au compact maximal
7. Fin de la preuve

Valeurs propres symplectiques

Valeurs propres symplectiques

Le groupe symplectique $Sp(\mathbb{R}^{2n})$ agit sur Sym_{2n}^{++} : $g \cdot X = gXg^t$.

Pour $\alpha = (\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n > 0)$, on note $\mathcal{O}_\alpha$ l'orbite de la matrice diagonale $Diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.

Valeurs propres symplectiques

Le groupe symplectique $Sp(\mathbb{R}^{2n})$ agit sur Sym_{2n}^{++} : $g \cdot X = gXg^t$.

Pour $\alpha = (\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n > 0)$, on note $\mathcal{O}_\alpha$ l'orbite de la matrice diagonale $Diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.

Théorème de Williamson (1936)

Tout $X \in Sym_{2n}^{++}$ appartient à une unique orbite $\mathcal{O}_\alpha$.

Le n-uplet α est composé des valeurs propres symplectiques de X. Il est noté $sp(X)$.

Valeurs propres symplectiques

Le groupe symplectique $Sp(\mathbb{R}^{2n})$ agit sur Sym_{2n}^{++} : $g \cdot X = gXg^t$.

Pour $\alpha = (\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n > 0)$, on note $\mathcal{O}_\alpha$ l'orbite de la matrice diagonale $Diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.

Théorème de Williamson (1936)

Tout $X \in Sym_{2n}^{++}$ appartient à une unique orbite $\mathcal{O}_\alpha$.

Le n-uplet α est composé des valeurs propres symplectiques de X. Il est noté $sp(X)$.

Cône de Horn symplectique

$\mathrm{Horn}_{\mathrm{sp}}(n)$ est l'ensemble des triplets $(sp(X), sp(Y), sp(X+Y))$ où X, Y appartiennent à Sym_{2n}^{++}.

- Identification équivariante $Sym_2 \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ donnée par

$$\begin{pmatrix} -y+z & x \\ x & y+z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & y-z \\ y+z & -x \end{pmatrix}$$

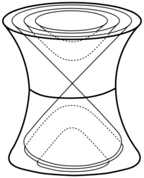

Figure: Orbites adjointes de $SL(2, \mathbb{R})$

- Identification équivariante $Sym_2 \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ donnée par
$$\begin{pmatrix} -y+z & x \\ x & y+z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & y-z \\ y+z & -x \end{pmatrix}$$

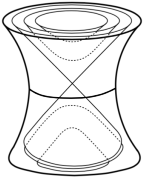

Figure: Orbites adjointes de $SL(2, \mathbb{R})$

- Identification $Sym_2^{++} \simeq \{x^2 + y^2 - z^2 < 0 \quad \text{et} \quad z > 0\}$

$\mathrm{Horn}_{sp}(1)$

$(a, b, c) \in \mathrm{Horn}_{sp}(1)$ si et seulement si $a + b \leq c$.

Le problème de Horn: le cadre classique

Le problème de Horn: le cadre classique

Le groupe unitaire $U(n)$ agit sur les matrices hermitiennes $n \times n$: l'orbite d'une matrice X est déterminée par le n-uplet $vp(X)$ formé par ses valeurs propres.

Cône de Horn classique

$\mathrm{Horn}(n)$ est l'ensemble des triplets $(vp(X), vp(Y), vp(X+Y))$ où X, Y sont des matrices hermitiennes $n \times n$.

Le problème de Horn: le cadre classique

Le groupe unitaire $U(n)$ agit sur les matrices hermitiennes $n \times n$: l'orbite d'une matrice X est déterminée par le n-uplet $vp(X)$ formé par ses valeurs propres.

Cône de Horn classique

$\mathrm{Horn}(n)$ est l'ensemble des triplets $(vp(X), vp(Y), vp(X+Y))$ où X, Y sont des matrices hermitiennes $n \times n$.

Nombreux travaux: Ky Fan, Lidskii, Weyl, Horn, Klyachko, Knutson-Tao, Belkale-Kumar, Berenstein-Sjamaar, Ressayre,...

Le problème de Horn: le cadre classique

Le groupe unitaire $U(n)$ agit sur les matrices hermitiennes $n \times n$: l'orbite d'une matrice X est déterminée par le n-uplet $vp(X)$ formé par ses valeurs propres.

Cône de Horn classique

$\mathrm{Horn}(n)$ est l'ensemble des triplets $(vp(X), vp(Y), vp(X+Y))$ où X, Y sont des matrices hermitiennes $n \times n$.

Nombreux travaux: Ky Fan, Lidskii, Weyl, Horn, Klyachko, Knutson-Tao, Belkale-Kumar, Berenstein-Sjamaar, Ressayre,...

Théorème (Klyachko,1998)

$(a, b, c) \in \mathrm{Horn}(n)$ si et seulement si

- $|a| + |b| = |c|$,
- pour toutes parties I, J, L de $\{1, \ldots, n\}$ de même cardinal, on a $|a|_I + |b|_J \leq |c|_L$ si le coefficient $c_{I,J}^L$ de Littlewood-Richardson est non nul.

Résultat principal

Résultat principal

Théorème (P, 22)

$(a, b, c) \in \mathrm{Horn}_{\mathrm{sp}}(n)$ si et seulement si

- $|a| + |b| \leq |c|$,
- pour toutes parties I, J, L de $\{1, \ldots, n\}$ de même cardinal, on a $|a|_I + |b|_J \leq |c|_L$ si le coefficient $c_{I,J}^L$ de Littlewood-Richardson est non nul.

Résultat principal

Théorème (P, 22)

$(a, b, c) \in \mathrm{Horn}_{\mathrm{sp}}(n)$ si et seulement si

- $|a| + |b| \leq |c|$,
- pour toutes parties I, J, L de $\{1, \dots, n\}$ de même cardinal, on a $|a|_I + |b|_J \leq |c|_L$ si le coefficient $c^L_{I,J}$ de Littlewood-Richardson est non nul.

Travaux antérieurs:

- Hiroshima (06): $\sum_{j=1}^k a_j + \sum_{j=1}^k b_j \leq \sum_{j=1}^k c_j$ (inégalités de Ky Fan).
- Bhatia-Jain (21): $a_i + b_j \leq c_{i+j-1}$ (inégalités de Weyl).
- Jain-Mishra (22): $|a|_I + \sum_{j=1}^k b_j \leq |c|_I$ pour tout $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$ (inégalités de Lidskii).

Classique versus Quantique

Classique versus Quantique

K groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, $T \subset K$ tore maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_{\geq 0}$ chambre de Weyl, $\Lambda_+ \subset \mathfrak{t}_{\geq 0}$ poids dominants

Classique versus Quantique

K groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, $T \subset K$ tore maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_{\geq 0}$ chambre de Weyl, $\Lambda_+ \subset \mathfrak{t}_{\geq 0}$ poids dominants

- L'objet classique: le cône

$$\mathrm{Horn}(K) = \left\{ (a, b, c) \in (\mathfrak{t}_{\geq 0})^3, Kc \subset Ka + Kb \right\}$$

Classique versus Quantique

K groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, $T \subset K$ tore maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_{\geq 0}$ chambre de Weyl, $\Lambda_+ \subset \mathfrak{t}_{\geq 0}$ poids dominants

- L'objet classique: le cône

$$\mathrm{Horn}(K) = \left\{(a, b, c) \in (\mathfrak{t}_{\geq 0})^3, Kc \subset Ka + Kb\right\}$$

- L'objet quantique: le monoïde

$$\Pi(K) = \left\{(\lambda, \mu, \nu) \in (\Lambda_+)^3, V_\nu^K \subset V_\lambda^K \otimes V_\mu^K\right\}$$

Classique versus Quantique

K groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, $T \subset K$ tore maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_{\geq 0}$ chambre de Weyl, $\Lambda_+ \subset \mathfrak{t}_{\geq 0}$ poids dominants

- L'objet classique: le cône

$$\mathrm{Horn}(K) = \left\{(a, b, c) \in (\mathfrak{t}_{\geq 0})^3, Kc \subset Ka + Kb\right\}$$

- L'objet quantique: le monoïde

$$\Pi(K) = \left\{(\lambda, \mu, \nu) \in (\Lambda_+)^3, V_\nu^K \subset V_\lambda^K \otimes V_\mu^K\right\}$$

Propriétés fondamentales

- $\mathbb{Q}^{>0} \cdot \Pi(K)$ est $\mathbb{Q}$-convexe.
- $\mathbb{Q}^{>0} \cdot \Pi(K)$ est dense dans $\mathrm{Horn}(K)$.
- $\mathrm{Horn}(K)$ est un cône convexe.

Le cône causal de $\mathfrak{sp}(\mathbb{R}^{2n})$

Le cône causal de $\mathfrak{sp}(\mathbb{R}^{2n})$

- Identifications équivariantes :

$$Sym_{2n} \simeq \mathfrak{sp}(\mathbb{R}^{2n}), \quad Sym_{2n}^{+} \simeq C_n, \quad Sym_{2n}^{++} \simeq C_n^0.$$

- $C_n \subset \mathfrak{sp}(\mathbb{R}^{2n})$ est le cône invariant fermé, contenant $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, et vérifiant $C_n \cap -C_n = \{0\}$

Le cône causal de $\mathfrak{sp}(\mathbb{R}^{2n})$

- Identifications équivariantes :

$$Sym_{2n} \simeq \mathfrak{sp}(\mathbb{R}^{2n}), \quad Sym_{2n}^{+} \simeq C_n, \quad Sym_{2n}^{++} \simeq C_n^0.$$

- $C_n \subset \mathfrak{sp}(\mathbb{R}^{2n})$ est le cône invariant fermé, contenant $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, et vérifiant $C_n \cap -C_n = \{0\}$
- Compact maximal $K = U(n) \subset G = Sp(\mathbb{R}^{2n})$, tore maximal $T \subset U(n)$
- Chambre de Weyl $\mathfrak{t}_{\geq 0} \subset \mathfrak{t}$, chambre holomorphe $\mathfrak{t}_{hol} \subset \mathfrak{t}_{\geq 0}$
- Théorème de Williamson revisité: toute G-orbite dans C_n^0 intersecte la chambre $\mathfrak{t}_{hol}$ en un unique élément.

Le cône causal de $\mathfrak{sp}(\mathbb{R}^{2n})$

- Identifications équivariantes :

$$Sym_{2n} \simeq \mathfrak{sp}(\mathbb{R}^{2n}), \quad Sym_{2n}^{+} \simeq C_n, \quad Sym_{2n}^{++} \simeq C_n^0.$$

- $C_n \subset \mathfrak{sp}(\mathbb{R}^{2n})$ est le cône invariant fermé, contenant $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, et vérifiant $C_n \cap -C_n = \{0\}$
- Compact maximal $K = U(n) \subset G = Sp(\mathbb{R}^{2n})$, tore maximal $T \subset U(n)$
- Chambre de Weyl $\mathfrak{t}_{\geq 0} \subset \mathfrak{t}$, chambre holomorphe $\mathfrak{t}_{hol} \subset \mathfrak{t}_{\geq 0}$
- Théorème de Williamson revisité: toute G-orbite dans C_n^0 intersecte la chambre $\mathfrak{t}_{hol}$ en un unique élément.

L'objet classique pour $G = Sp(\mathbb{R}^{2n})$

$$\mathrm{Horn}_{\mathrm{sp}}(n) = \mathrm{Horn}_{hol}(G) = \left\{(a, b, c) \in (\mathfrak{t}_{hol})^3, Gc \subset Ga + Gb\right\}$$

La série discrète holomorphe de $G = Sp(\mathbb{R}^{2n})$

La série discrète holomorphe de $G = Sp(\mathbb{R}^{2n})$

- Λ_{hol} = l'ensemble des n-uplets $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq n+1$.
- $S^2(\mathbb{C}^n) = K$-module des matrices complexes symétriques.

La série discrète holomorphe de $G = Sp(\mathbb{R}^{2n})$

- Λ_{hol} = l'ensemble des n-uplets $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq n+1$.
- $S^2(\mathbb{C}^n) = K$-module des matrices complexes symétriques.

Haris-Chandra (55)

À tout $\lambda \in \Lambda_{hol}$ on peut associer une rep. unitaire irred. de carré intégrable V_λ^G tel que $V_\lambda^G|_K \simeq V_\lambda^K \otimes \mathrm{Sym}(S^2(\mathbb{C}^n))$.

La série discrète holomorphe de $G = Sp(\mathbb{R}^{2n})$

- Λ_{hol} = l'ensemble des n-uplets $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq n+1$.
- $S^2(\mathbb{C}^n)$ = K-module des matrices complexes symétriques.

Haris-Chandra (55)

À tout $\lambda \in \Lambda_{hol}$ on peut associer une rep. unitaire irred. de carré intégrable V_λ^G tel que $V_\lambda^G\,|_K \simeq V_\lambda^K \otimes \mathrm{Sym}(S^2(\mathbb{C}^n))$.

Produit tensoriel (Repka, 79)

Pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda_{hol}$, on a une décomposition hilbertienne $V_\lambda^G \otimes V_\mu^G = \sum_{\nu \in \Lambda_{hol}} c_{\lambda\mu}^\nu \, V_\nu^G$ où les multiplicités $c_{\lambda\mu}^\nu$ sont finies.

La série discrète holomorphe de $G = Sp(\mathbb{R}^{2n})$

- Λ_{hol} = l'ensemble des n-uplets $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq n+1$.
- $S^2(\mathbb{C}^n)$ = K-module des matrices complexes symétriques.

Haris-Chandra (55)

À tout $\lambda \in \Lambda_{hol}$ on peut associer une rep. unitaire irred. de carré intégrable V_λ^G tel que $V_\lambda^G|_K \simeq V_\lambda^K \otimes \mathrm{Sym}(S^2(\mathbb{C}^n))$.

Produit tensoriel (Repka, 79)

Pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda_{hol}$, on a une décomposition hilbertienne $V_\lambda^G \otimes V_\mu^G = \sum_{\nu \in \Lambda_{hol}} c_{\lambda\mu}^\nu V_\nu^G$ où les multiplicités $c_{\lambda\mu}^\nu$ sont finies.

L'objet quantique pour $G = Sp(\mathbb{R}^{2n})$

$$\Pi_{hol}(G) = \left\{(\lambda, \mu, \nu) \in (\Lambda_{hol})^3,\ V_\nu^G \subset V_\lambda^G \otimes V_\mu^G\right\}$$

La quantification commute à la réduction

La quantification commute à la réduction

Soient $\lambda, \mu \in \Lambda(n)$. G-variété Hamiltonienne $G\lambda \times G\mu$ avec application moment $\Phi_{\lambda,\mu} : G\lambda \times G\mu \to \mathfrak{g}$.

La quantification commute à la réduction

Soient $\lambda, \mu \in \Lambda(n)$. G-variété Hamiltonienne $G\lambda \times G\mu$ avec application moment $\Phi_{\lambda,\mu} : G\lambda \times G\mu \to \mathfrak{g}$.

Propriétés géométriques

- $\Phi_{\lambda,\mu}$ est propre
- L'image of $\Phi_{\lambda,\mu}$ est contenu dans $\mathfrak{g}_{hol} := G \cdot \mathfrak{t}_{hol}$.
- $G\lambda \times G\mu /\!\!/ G\xi = \Phi_{\lambda,\mu}^{-1}(G\xi)/G$ est une variété symplectique compacte orbifolde pour $\xi \in \mathfrak{g}_{hol}$ générique.

La quantification commute à la réduction

Soient $\lambda, \mu \in \Lambda(n)$. G-variété Hamiltonienne $G\lambda \times G\mu$ avec application moment $\Phi_{\lambda,\mu} : G\lambda \times G\mu \to \mathfrak{g}$.

Propriétés géométriques

- $\Phi_{\lambda,\mu}$ est propre
- L'image of $\Phi_{\lambda,\mu}$ est contenu dans $\mathfrak{g}_{hol} := G \cdot \mathfrak{t}_{hol}$.
- $G\lambda \times G\mu /\!\!/ G\xi = \Phi^{-1}_{\lambda,\mu}(G\xi)/G$ est une variété symplectique compacte orbifolde pour $\xi \in \mathfrak{g}_{hol}$ générique.

Théorème $[Q, R] = 0$ (P, 15)

$$[V_\nu^G : V_\lambda^G \otimes V_\mu^G] = \mathrm{Q}(G\lambda \times G\mu /\!\!/ G\nu).$$

La quantification commute à la réduction

Soient $\lambda, \mu \in \Lambda(n)$. G-variété Hamiltonienne $G\lambda \times G\mu$ avec application moment $\Phi_{\lambda,\mu} : G\lambda \times G\mu \to \mathfrak{g}$.

Propriétés géométriques

- $\Phi_{\lambda,\mu}$ est propre
- L'image of $\Phi_{\lambda,\mu}$ est contenu dans $\mathfrak{g}_{hol} := G \cdot \mathfrak{t}_{hol}$.
- $G\lambda \times G\mu /\!\!/ G\xi = \Phi^{-1}_{\lambda,\mu}(G\xi)/G$ est une variété symplectique compacte orbifolde pour $\xi \in \mathfrak{g}_{hol}$ générique.

Théorème $[Q, R] = 0$ (P, 15)

$$[V^G_\nu : V^G_\lambda \otimes V^G_\mu] = \mathrm{Q}(G\lambda \times G\mu /\!\!/ G\nu).$$

Corollaire

$\mathbb{Q}^{>0} \cdot \Pi_{hol}(G)$ est dense dans $\mathrm{Horn}_{hol}(G) = \mathrm{Horn}_{\mathrm{sp}}(n)$.

Un résultat de H.P. Jakobsen et M. Vergne

Un résultat de H.P. Jakobsen et M. Vergne

Jakobsen-Vergne (79)

$$[V^G_\nu : V^G_\lambda \otimes V^G_\mu] = [V^K_\nu : V^K_\lambda \otimes V^K_\mu \otimes \mathrm{Sym}(S^2(\mathbb{C}^n))]$$

Un résultat de H.P. Jakobsen et M. Vergne

Jakobsen-Vergne (79)

$$[V_\nu^G : V_\lambda^G \otimes V_\mu^G] = [V_\nu^K : V_\lambda^K \otimes V_\mu^K \otimes \mathrm{Sym}(S^2(\mathbb{C}^n))]$$

Corollaire

- $\Pi_{hol}(G) \subset \Lambda^3$ est stable pour l'addition.
- $\mathbb{Q}^{>0} \cdot \Pi_{hol}(G)$ est $\mathbb{Q}$-convexe.

Un résultat de H.P. Jakobsen et M. Vergne

Jakobsen-Vergne (79)

$$[V_\nu^G : V_\lambda^G \otimes V_\mu^G] = [V_\nu^K : V_\lambda^K \otimes V_\mu^K \otimes \mathrm{Sym}(S^2(\mathbb{C}^n))]$$

Corollaire

- $\Pi_{hol}(G) \subset \Lambda^3$ est stable pour l'addition.
- $\mathbb{Q}^{>0} \cdot \Pi_{hol}(G)$ est $\mathbb{Q}$-convexe.

Théorème (P, 20)

$\mathrm{Horn}_{\mathrm{sp}}(n)$ est un cône convexe fermé de $(\mathfrak{t}_{hol})^3$.

Réduction au compact maximal

Réduction au compact maximal

$M = T^*K \times T^*K \times S^2(\mathbb{C}^n)^o$: variété $K \times K \times K$-hamiltonienne, application moment $\Phi : M \to \mathfrak{k}^3$

Réduction au compact maximal

$M = T^*K \times T^*K \times S^2(\mathbb{C}^n)^o$: variété $K \times K \times K$-hamiltonienne, application moment $\Phi : M \to \mathfrak{k}^3$

Object classique associé à $K^3 \circlearrowleft M$

Polytope de Kirwan $\Delta(M) = \Phi(M) \cap (\mathfrak{t}_{\geq 0})^3$

Réduction au compact maximal

$M = T^*K \times T^*K \times S^2(\mathbb{C}^n)^o$: variété $K \times K \times K$-hamiltonienne, application moment $\Phi : M \to \mathfrak{k}^3$

Object classique associé à $K^3 \circlearrowleft M$

Polytope de Kirwan $\Delta(M) = \Phi(M) \cap (\mathfrak{t}_{\geq 0})^3$

Object quantique associé à $K^3 \circlearrowleft M$

$$\Pi(M) = \left\{ (\lambda, \mu, \nu) \in (\Lambda_+)^3, V_\lambda^K \otimes V_\mu^K \otimes V_\nu^K \subset \mathbb{C}[M] \right\}$$

Réduction au compact maximal

$M = T^*K \times T^*K \times S^2(\mathbb{C}^n)^o$: variété $K \times K \times K$-hamiltonienne, application moment $\Phi : M \to \mathfrak{k}^3$

Object classique associé à $K^3 \circlearrowleft M$

Polytope de Kirwan $\Delta(M) = \Phi(M) \cap (\mathfrak{t}_{\geq 0})^3$

Object quantique associé à $K^3 \circlearrowleft M$

$$\Pi(M) = \left\{(\lambda, \mu, \nu) \in (\Lambda_+)^3,\ V_\lambda^K \otimes V_\mu^K \otimes V_\nu^K \subset \mathbb{C}[M]\right\}$$

Proposition

- $\mathbb{Q}^{>0} \cdot \Pi(M)$ est dense dans $\Delta(M)$.
- Identité de J-V implique que $\Delta(M)^* = \mathrm{Horn}_{hol}(G)$.
- $\mathrm{Horn}_{\mathrm{sp}}(n) = \Delta(M)^*$.

Fin de la preuve

Fin de la preuve

Un calcul direct montre que $\Delta(M)^*$ est égal à

$$\mathrm{Horn}^{\leq}(n) = \left\{(vp(A), vp(B), vp(C)), A + B \leq C\right\}$$

Fin de la preuve

Un calcul direct montre que $\Delta(M)^*$ est égal à

$$\mathrm{Horn}^{\leq}(n) = \Big\{(vp(A), vp(B), vp(C)), A + B \leq C\Big\}$$

On termine la preuve du résultat principal avec

Théorème (Friedland-Fulton, 00)

$(a, b, c) \in \mathrm{Horn}^{\leq}(n)$ si et seulement si

- $|a| + |b| \leq |c|$,
- pour toutes parties I, J, L de $\{1, \ldots, n\}$ de même cardinal, on a $|a|_I + |b|_J \leq |c|_L$ si le coefficient $c_{I,J}^L$ de Littlewood-Richardson est non nul.

Fin de la preuve

Un calcul direct montre que $\Delta(M)^*$ est égal à

$$\mathrm{Horn}^{\leq}(n) = \left\{(vp(A), vp(B), vp(C)), A + B \leq C\right\}$$

On termine la preuve du résultat principal avec

Théorème (Friedland-Fulton, 00)

$(a, b, c) \in \mathrm{Horn}^{\leq}(n)$ si et seulement si

- $|a| + |b| \leq |c|$,
- pour toutes parties I, J, L de $\{1, \ldots, n\}$ de même cardinal, on a $|a|_I + |b|_J \leq |c|_L$ si le coefficient $c_{I,J}^L$ de Littlewood-Richardson est non nul.

Merci pour votre attention !