Problème de Horn, projection des mesures orbitales, le cas d'une matrice de rang un

Jacques Faraut

Théorie des Représentations
et Analyse Harmonique

Nancy, 13 mai 2022

Projection d'une orbite pour l'action du groupe unitaire U_n sur l'espace $\mathcal{H}_n$ des matrices hermitiennes $n \times n$, sur l'espace $\mathcal{D}_n \simeq \mathbb{R}^n$ des matrices diagonales.

Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{O}_\alpha$ l'orbite de la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,

$$\mathcal{O}_\alpha = \{U \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) U^* \mid U \in U(n)\}.$$

Le problème est de déterminer l'image de l'orbite $\mathcal{O}_\alpha$ par cette projection p.

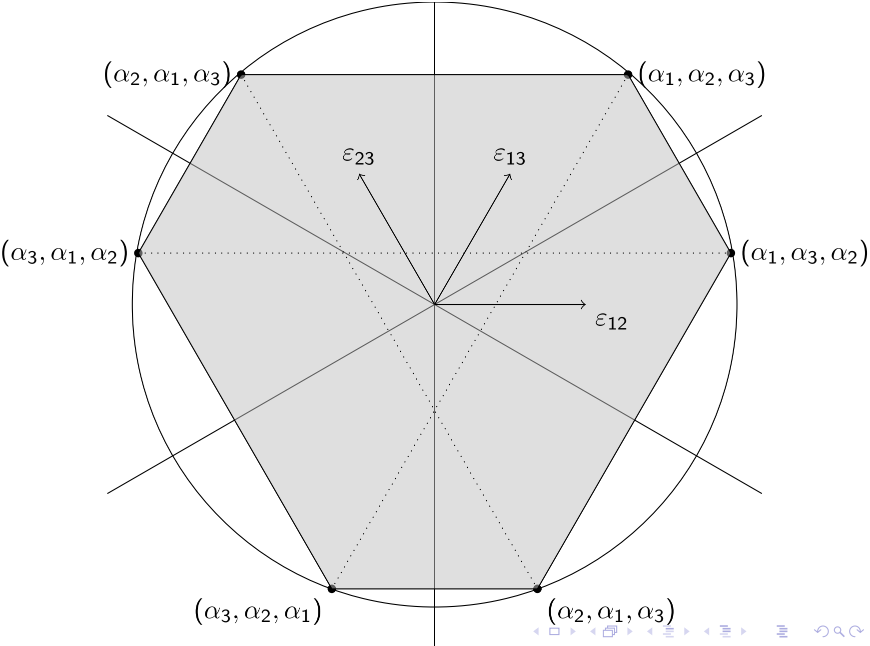
- Schur (1923) a montré que cette image est contenue dans l'enveloppe convexe des points $\sigma(\alpha) = (\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})$,

$$p(\mathcal{O}_\alpha) \subset \mathrm{Conv}\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

- Horn (1954) a montré l'égalité

$$p(\mathcal{O}_\alpha) = \mathrm{Conv}\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

C'est le théorème de convexité de Schur-Horn.



$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3)$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
ε_{23}
ε_{13}
$(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)$
$(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$
ε_{12}
$(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$
$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3)$

- Kostant (1973) Généralisation de ce théorème au cas d'une orbite d'un groupe de Lie compact agissant sur son algèbre de Lie, et de la projection sur une sous-algèbre de Cartan.

Ce problème a une version "probabiliste". Si X est une matrice hermitienne aléatoire distribuée uniformément sur l'orbite $\mathcal{O}_\alpha$, quelle est la distribution de la projection $Y = p(X)$? Notons μ_α la mesure orbitale, image de la mesure de Haar normalisée du groupe unitaire U_n par l'application

$$U \mapsto U\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)U^*$$

. Le problème est de déterminer son image $M_\alpha = p(\mu_\alpha)$. Si f est une fonction définie sur $\mathcal{O}_\alpha$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_\alpha(dx) = \int_{\mathcal{O}_\alpha} f\big(p(X)\big)\mu_\alpha(dX).$$

Cette mesure M_α est décrite par Heckman (1982) dans la situation générale d'un groupe de Lie compact agissant sur son algèbre de Lie. La mesure M_α possède une densité qui est une fonction polynomiale par morceaux.

Heckman utilise l'analyse de Fourier. La transformée de Fourier de la mesure orbitale μ_α est donnée par la formule de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber.

- Harish-Chandra (1957), dans la situation générale de l'action d'un groupe de Lie compact sur son algèbre de Lie.

- Itzykson-Zuber (1980), dans le cas de U_n agissant sur $\mathcal{H}_n$: Si $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $B = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$

$$\int_{U_n} e^{\mathrm{tr}\,(AUBU^*)} \omega(dU) = \delta_n! \frac{1}{V_n(\alpha) V_n(\beta)} \det\big(e^{\alpha_j \alpha_k}\big)_{1 \leq j,k \leq n},$$

où V_n est le polynôme de Vandermonde

$$V_n(z) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (z_j - z_k).$$

Projection d'une orbite sur le sous-espace $\mathcal{H}_{n-1}$
Soit X une matrice hermitienne $n \times n$

$$X = \begin{pmatrix} & & x_{1n} \\ & Y & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Sachant que les valeurs propres de X sont les nombres $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$, que peut-on dire des valeurs propres $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}$ de Y ?
Cauchy (1829) *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes*
Les valeurs propres de Y vérifient la propriété d'entrelacement suivante

$$\alpha_1 \geq \lambda_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_{n-1} \geq \lambda_{n-1} \geq \alpha_n.$$

Notons p_{n-1} cette projection :

$$p_{n-1} : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n-1}.$$

Le problème est équivalent à déterminer la projection d'une orbite $\mathcal{O}_\alpha$ de U_n.

Rappelons ce qu'est la partie radiale d'une mesure de probalilité μ sur $\mathcal{H}_n$ invariante par $U(n)$. C'est une mesure ν sur $\mathbb{R}^n$ qui est la distribution jointe des valeurs propres d'une matrice hermitienne X dont la distribution est la mesure μ. Si f est une fonction définie sur $\mathcal{H}_n$,

$$\int_{\mathcal{H}_n} f(X)\mu(dX) = \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{U_n} f\big(U\mathrm{diag}(t_1,\ldots,t_n)U^*\big)\omega(dU)\Big)\nu(dt).$$

La version probabiliste a été établie par **Baryshnikov** (2001). Notons $\nu_\alpha^{(n-1)}$ la partie radiale de la projection de la mesure orbitale μ_α. Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}^{n-1}$,

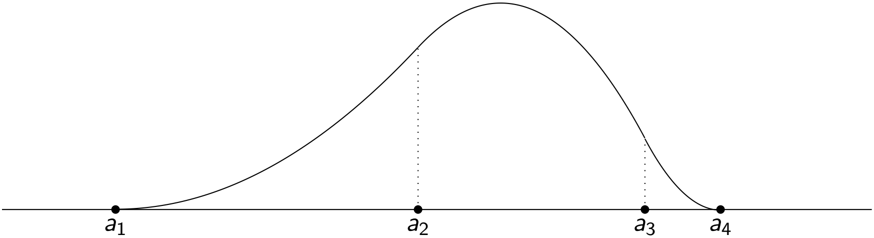
$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t)\nu_\alpha^{(n-1)}(dt) \\ = \; & \frac{(n-1)!}{V_n(\alpha)} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n-1}} dt_{n-1} \int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_{n-2}} dt_{n-2} \ldots \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dt_1 V_{n-1}(t) f(t). \end{aligned}$$

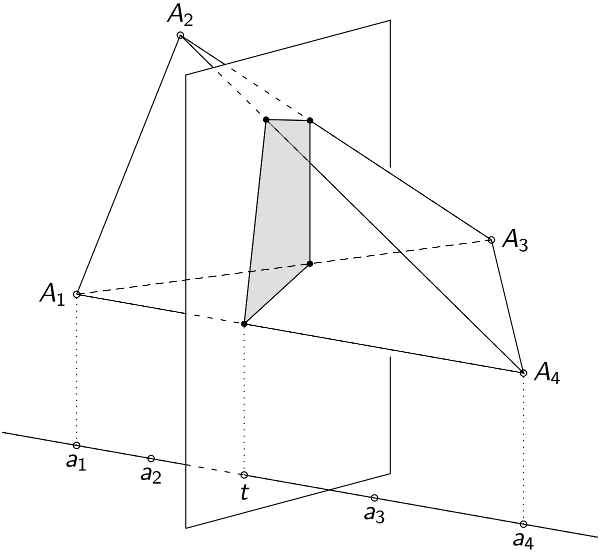
Considérons la projection de $\mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{H}_1 \simeq \mathbb{R}$,

$$\mathcal{H}_n \to \mathbb{R}, \ X \to x_{11}.$$

- Okounkov (1996). La projection de la mesure orbitale μ_α est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ dont la densité est une fonction spline de noeuds $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. C'est-à-dire une fonction polynomiale par morceaux, de classe $\mathcal{C}^{(n-3)}$, et sa restriction à chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i-1}]$ est un polynôme de degré $\leq n-2$.

- Olshanski (2013). Pour la projection sur $\mathcal{H}_k$ $(1 \leq k \leq n-1)$, Olshanski a obtenu une formule déterminantale pour la partie radiale de la projection d'une mesure orbitale.


a_1
a_2
a_3
a_4


A_2
A_3
A_1
A_4
a_1
a_2
t
a_3
a_4

Problème de Horn

Connaissant les valeurs propres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de la matrice hermitienne A et les valeurs propres $\beta_1, \ldots, \beta_n$ de B, que peut-on dire des valeurs propres $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de la somme $C = A + B$?

Supposons que la matrice aléatoire X soit uniformément distribuée sur l'orbite $\mathcal{O}_\alpha$, et que, indépendemment, la matrice aléatoire Y soit uniformément distribuée sur l'orbite $\mathcal{O}_\beta$. Le problème de Horn probabiliste est de déterminer la distribution des valeurs propres de la somme $Z = X + Y$.

Cela revient à déterminer la partie radiale $\nu_{\alpha,\beta}$ du produit de convolution $\mu_\alpha * \mu_\beta$

Problème de Horn multiplicatif

Si A et B sont des matrices hermitiennes, la matrice AB n'est pas hermitienne en général. Supposons A et B hermitiennes définies positives. Alors les matrices AB et $B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$ ont les mêmes valeurs propres.

Connaissant les valeurs propres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de A et les valeurs propres $\beta_1, \ldots, \beta_n$ de B. Que peut-on dire des valeurs propres de $B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$?

Problème de Horn multiplicatif probabiliste : déterminer la partie radiale du produit de convolution $\mu_\alpha * \mu_\beta$. Cette fois il s'agit du produit de convolution des mesures $U_n \times U_n$-invariantes sur le groupe $GL(n, \mathbb{C})$.

Partie radiale du produit de convolution $\mu_\alpha * \mu_\beta$
Transformation de Fourier-Laplace d'une mesure μ sur $\mathcal{H}_n$:

$$\mathcal{F}\mu(Z) = \int_{\mathcal{H}_n} e^{\mathrm{tr}\,(ZX)}\mu(dX).$$

Si μ est une mesure invariante par U_n de partie radiale ν,

$$\mathcal{F}\mu(Z) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z,t)\nu(dt), \quad Z = \mathrm{diag}(z_1, \dots, z_n),$$

où

$$\Phi(z,t) = \delta_n! \frac{1}{V_n(z)V_n(t)} \det\left(e^{z_j t_k}\right)_{1 \leq j,k \leq n}$$

En particulier

$$\mathcal{F}\mu_\alpha(Z) = \Phi(z,\alpha).$$

Considérons aussi la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$. Si M est une mesure sur $\mathbb{R}^n$,

$$\widehat{M}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(z,t)} M(dt).$$

La transformation de Fourier de la mesure de Heckman M_α est égale à la restriction à $\mathcal{D}_n$ de la transformation de Fourier de μ_α.

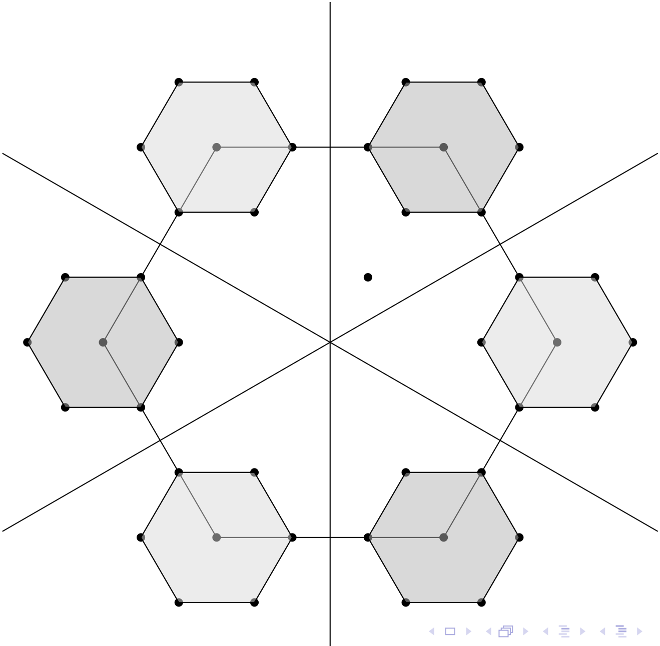
$$\widehat{M_\alpha}(z) = \Phi_n(z, \alpha).$$

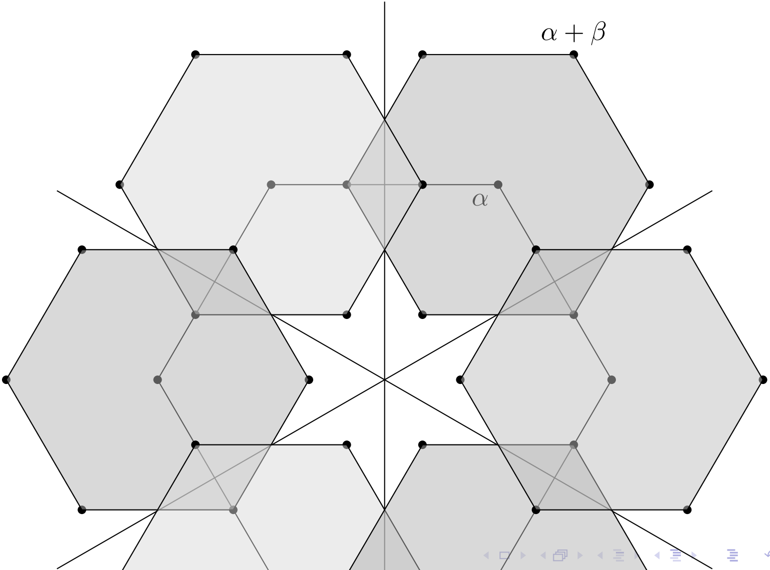
Le problème de Horn probabiliste revient à déterminer la partie radiale $\nu_{\alpha,\beta}$ du produit de convolution $\mu_\alpha * \mu_\beta$.
On définit la mesure discrète η_α sur $\mathbb{R}^n$:

$$\eta_\alpha = \frac{\delta_n!}{V_n(\alpha)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \delta_{\sigma(\alpha)}.$$

Théorème (JF,2018)

$$\begin{aligned}\nu_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{n!}\frac{1}{\delta_n!}V_n(x)\eta_\alpha * M_\beta \\ &= \frac{1}{n!}\frac{1}{\delta_n!}\frac{V_n(x)}{V_n(\alpha)}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\delta_{\sigma(\alpha)} * M_\beta.\end{aligned}$$





$\alpha+\beta$
α

Méthode de Forrester, Kieburg, Zhang (2021)
On suppose que B est une matrice de rang un : $B = \mathrm{diag}(b, 0, \dots, 0)$.
On suppose $b > 0$
Théorème
La partie radiale $\nu_{\alpha,\beta}$ est portée par l'hyperplan $t_1 + \cdots + t_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n + b$, Son support est défini par l'entrelacement

$$t_1 \geq \alpha_1 \geq \cdots \geq t_n \geq \alpha_n,$$

et elle a pour densité

$$h(t) = \frac{1}{n} \frac{1}{V_n(\alpha)} V_n(t)$$

La méthode de Forrester, Kieburg et Zhang utilise la formule d'inversion de la transformation de Fourier sphérique. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, symétrique. Sa transformée de Fourier sphérique est

$$F(x) = \Phi(f)(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \Phi(ix, t) f(t) V_n(t)^2 \lambda(dt).$$

Sous certaines hypothèses,

$$f(t) = C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(-ix, t) F(x) V_n(x)^2 \lambda(dx).$$

Formule intégrale de Andreief

Soit (X,μ) un espace mesuré, et soient $f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_n$ des fonctions définies sur X.

$$\begin{aligned}
&\int_{X^n} \begin{vmatrix} f_1(x) & \ldots & f_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1(x) & \ldots & g_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(x) & \ldots & g_n(x_n) \end{vmatrix} \mu(dx_1)\ldots\mu(dx_n) \\
= \quad & n!\det\Big(\int_X f_j(x)g_k(x)\mu(dx)\Big)_{1\leq j,k\leq n}
\end{aligned}$$

Cette formule fait l'objet d'un article publié par C. Andreief en 1882 à Karkhiv.

En 2010, Kieburg et Guhr ont établi des extensions de cette formule. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres et $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ des fonctions définies sur X. La formule suivante sera utilisée dans la suite

$$\int_{X^{n-1}} \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ f_1(x_1) & \dots & f_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_{n-1}) & \dots & f_n(x_{n-1}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(n_{n-1}) & \dots & g_n(x_{n-1}) \end{vmatrix} \mu(dx_1)\dots\mu(dx$$

$$= \quad -(n-1)! \begin{vmatrix} 0 & b_1 & \dots\dots\dots & b_n \\ a_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & \left(\int_X f_j(x) g_k(x) \mu(dx)\right)_{1 \le j,k \le n} & \\ \vdots & & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}$$

Idée de la démonstration

On observe que les deux membres sont des formes bilinéaires des vectors $\{a_1, \ldots, a_n\}$ et $\{b_1, \ldots, b_n\}$:

$$\sum_{j,k} C_{jk} a_j b_k \quad \text{et} \quad \sum_{j,k} D_{jk} a_j b_k.$$

On montre les égalités $C_{jk} = D_{jk}$ en utilisant la formule intégrale de Andreief.

Mesure orbitale des matrices hermitiennes de rang un

Prenons $\beta = (1, 0, \ldots, 1)$, et soit $\mathcal{O}_\beta$ l'orbite des projecteurs de rang un :

$$\mathcal{O}_\beta = \{X = (u_j \overline{u_k}) \mid u = (u_1, \ldots, u_n) \in S((\mathbb{C}^n)\},$$

image de la sphère unité $S(\mathbb{C}^n)$ par l'application

$$S(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{O}_\beta, \quad u \mapsto X = (u_j \overline{u_k}).$$

La mesure orbitale μ_β est l'image de la mesure uniforme normalisée σ sur $S(\mathbb{C}^n)$.

Transformée de Fourier de μ_β :

$$\mathcal{F}(\mu_\beta)(Z) = \int_{\mathcal{O}_\beta} e^{\mathrm{tr}\,(ZX)} \mu_\beta(dX).$$

Elle est déterminée par sa restriction au sous-espace des matrices diagonales.

$$\mathcal{F}(\mu_\beta)\big(\mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_n)\big)\big) = \int_{S(\mathbb{C}^n)} \exp(z_1|u_1|^2 + \cdots + z_n|u_n|^2)\sigma(du).$$

Comme conséquence de la formule de Hermite-Genocchi au sujet des fonctions splines on obtient : si f est une fonction de classe $n-1$ sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{S(\mathbb{C}^n} f^{(n-1)}(z_1|u_1|^2 + \cdots + z_n|u_n|^2)\sigma(du) = \frac{(n-1)!}{V_n(z_1, \ldots, z_n)} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & \ldots & z_n \\ \vdots & & \vdots \\ f(z_1) & \ldots & f(z_n) \end{vmatrix}.$$

Si $\beta = (b, 0, \ldots, 0)$,

$$\Phi(z, \beta) = \frac{(n-1)!}{V_n(z_1, \ldots, z_n)} \frac{1}{b^{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & \ldots & z_n \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-2} & \ldots & z_n^{n-2} \\ e^{bz_1} & \ldots & e^{bz_n} \end{vmatrix},$$

qui peut aussi s'écrire

$$\Phi(z, \beta) = (n-1)! \frac{1}{b^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{bz_j}}{\prod_{k \neq j}(z_j - z_k)}.$$

Finalement, après régularisation, on est ramené au calcul de l'intégrale

$$\begin{aligned} & \nu_{\alpha,\beta}(t) \\ = \quad & (n-1)! \lim_{\tau \to 0} \sum_{\ell=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \det\left(e^{ix_j \alpha_k}\right)_{1 \leq j,k \leq n} \det\left(e^{-ix_j t_k}\right)_{1 \leq j,k \leq n} \\ & \frac{e^{ibx_\ell}}{\prod_{k \neq \ell}(x_\ell - x_k)} e^{-\tau |x|^2} \lambda(dx). \end{aligned}$$

Pour chacune des intégrales on utilise l'extension de la formule d'Andreief