

Les crochets de Rankin-Cohen pour les domaines de type-tube

Jean-Louis Clerc

Vandœuvre-lès-Nancy, 12–13 mai 2022

Plan

1. Les crochets de Rankin-Cohen pour le demi-plan complexe
2. Algèbre de Jordan euclidienne, domaine de type-tube, espaces de Bergman à poids
3. Les deux théorèmes principaux
4. Esquisse de démonstration du théorème 1
5. Esquisse de démonstration du théorème 2
 - 5.1 Transformée de Laplace
 - 5.2 Propriétés d'unitarité
 - 5.3 Covariance des crochets de Rankin-Cohen
6. Lien avec la formule de Rodrigues

Les crochets de Rankin-Cohen

$G = SL(2, \mathbb{R})$ agit sur le demi-plan $\mathcal{T} = \{\Im z > 0\}$ par

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

$$j(g, z) = (cz + d)^{-2}$$

Les crochets de Rankin-Cohen

$G = SL(2, \mathbb{R})$ agit sur le demi-plan $\mathcal{T} = \{\Im z > 0\}$ par

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

$$j(g, z) = (cz + d)^{-2}$$

Pour $\ell \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{O} = \{F : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}, F \text{ holomorphe}\}$$

$$g \in G, g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (\pi_\ell(g)F)(z) = (cz + d)^{-\ell} F\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

definit une *représentation holomorphe* π_ℓ de G .

Soit $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. L'opérateur bi-différentiel

$$B_{\ell_1, \ell_2}^{(k)} : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$$

$$\text{res} \circ \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{(\ell_1 + k - j - 1)_j (\ell_2 + j - 1)_{k-j}}{j! (k-j)!} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{k-j} \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^j$$

où

$$(a)_j = a(a-1) \dots (a-j+1) \quad \text{symbole de Pochhammer .}$$

satisfait la propriété suivante :

pour tout $g \in G$,

$$B_{\ell_1, \ell_2}^{(k)} \circ (\pi_{\ell_1}(g) \otimes \pi_{\ell_2}(g)) = \pi_{\ell_1 + \ell_2 + 2k}(g) \circ B_{\ell_1, \ell_2}^{(k)} .$$

Applications

1. aux formes modulaires

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z)$$

Les crochets de Rankin-Cohen permettent de construire des formes modulaires de poids $\ell_1 + \ell_2 + 2k$ à partir de formes modulaires de poids ℓ_1 et ℓ_2 .

Applications

1. aux formes modulaires

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad f \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = (cz + d)^k f(z)$$

Les crochets de Rankin-Cohen permettent de construire des formes modulaires de poids $\ell_1 + \ell_2 + 2k$ à partir de formes modulaires de poids ℓ_1 et ℓ_2 .

2. à la décomposition du produit tensoriel $\pi_{\ell_1} \otimes \pi_{\ell_2}$ de deux représentations de la série discrète holomorphe

$$\ell_1, \ell_2 \geq 2 \quad \pi_{\ell_1} \otimes \pi_{\ell_2} \simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} \pi_{\ell_1 + \ell_2 + 2k}$$

Les crochets de Rankin-Cohen sont (à une constante près) les projecteurs sur les composantes de la décomposition.

Algèbre de Jordan euclidienne

cône symétrique Ω : cône propre, convexe, ouvert, homogène
et auto-adjoint dans un espace euclidien V de dimension n

cône symétrique \longleftrightarrow algèbre de Jordan euclidienne

Algèbre de Jordan euclidienne

cône symétrique Ω : cône propre, convexe, ouvert, homogène et auto-adjoint dans un espace euclidien V de dimension n

cône symétrique \longleftrightarrow algèbre de Jordan euclidienne

Exemple : $V = \text{Symm}_r(\mathbb{R})$, $n = \frac{r(r+1)}{2} = r + \frac{r(r-1)}{2}$

Ω matrices symétriques
définies-positives

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

Algèbre de Jordan euclidienne

cône symétrique Ω : cône propre, convexe, ouvert, homogène et auto-adjoint dans un espace euclidien V de dimension n

cône symétrique \longleftrightarrow algèbre de Jordan euclidienne

Exemple : $V = \text{Symm}_r(\mathbb{R})$, $n = \frac{r(r+1)}{2} = r + \frac{r(r-1)}{2}$

Ω matrices symétriques
définies-positives $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$

Trace et déterminant

tr produit scalaire $(x, y) = \text{tr } xy$, $\text{tr } e = r$ (rang de V)

det polynôme de degré r $n = r + \frac{(r-1)r}{2}d$

$$G(\Omega) = \{g \in GL(V), g(\Omega) = \Omega\}, \quad L = G(\Omega)^0$$

Algèbre de Jordan euclidienne

cône symétrique Ω : cône propre, convexe, ouvert, homogène et auto-adjoint dans un espace euclidien V de dimension n

cône symétrique \longleftrightarrow algèbre de Jordan euclidienne

Exemple : $V = \text{Symm}_r(\mathbb{R})$, $n = \frac{r(r+1)}{2} = r + \frac{r(r-1)}{2}$

Ω matrices symétriques
définies-positives $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$

Trace et déterminant

tr produit scalaire $(x, y) = \text{tr } xy$, $\text{tr } e = r$ (rang de V)

det polynôme de degré r $n = r + \frac{(r-1)r}{2}d$

$$G(\Omega) = \{g \in GL(V), g(\Omega) = \Omega\}, \quad L = G(\Omega)^0$$

dans l'exemple

$$G(\Omega) = GL_r(\mathbb{R}) \text{ agissant par } (g, x) \longmapsto gxg^t$$

Domaine de type-tube

V algèbre de Jordan euclidienne simple, \mathbb{V} sa complexifiée
Le domaine de type-tube associé :

$$\mathbb{V} \supset T_{\Omega} = \{z = x + iy, x \in V, y \in \Omega\}$$

Automorphismes holomorphes de T_{Ω} :

- translations $t_v = z \mapsto z + v, \quad N = \{t_v, v \in V\}$
- $L \ni \ell \quad z \mapsto \ell z$
- l'inversion $\iota \quad z \mapsto -z^{-1}$

Domaine de type-tube

V algèbre de Jordan euclidienne simple, \mathbb{V} sa complexifiée
Le domaine de type-tube associé :

$$\mathbb{V} \supset T_{\Omega} = \{z = x + iy, x \in V, y \in \Omega\}$$

Automorphismes holomorphes de T_{Ω} :

- translations $t_v = z \mapsto z + v, \quad N = \{t_v, v \in V\}$
- $L \ni \ell \quad z \mapsto \ell z$
- l'inversion $\iota \quad z \mapsto -z^{-1}$

Théorème : La composante neutre du groupe des automorphismes holomorphes de T_{Ω} est engendré par N, L et ι .

G est un groupe de Lie simple et le sous-groupe des automorphismes affines $P = L \ltimes N$ est un sous-groupe parabolique maximal de G .

Soit $g \in G$.

$$z \in T_\Omega \quad j(g, z) = \text{Det}(Dg(z)) \neq 0, \quad e^{\psi_g(z)} = j(g, z)$$

\tilde{G} = le revêtement universel de G

$$\tilde{G} = \{(g, \psi_g), e^{\psi_g(z)} = j(g, z)\}$$

avec la loi de groupe

$$(g, \psi_g)(h, \psi_h) = (gh, \psi_g \circ h + \psi_h),$$

avec fibre isomorphe à \mathbb{Z} .

Soit $g \in G$.

$$z \in T_\Omega \quad j(g, z) = \text{Det}(Dg(z)) \neq 0, \quad e^{\psi_g(z)} = j(g, z)$$

\tilde{G} = le revêtement universel de G

$$\tilde{G} = \{(g, \psi_g), e^{\psi_g(z)} = j(g, z)\}$$

avec la loi de groupe

$$(g, \psi_g)(h, \psi_h) = (gh, \psi_g \circ h + \psi_h),$$

avec fibre isomorphe à \mathbb{Z} .

Série des représentations holomorphes scalaires : $\nu \in \mathbb{C}$

$$\pi_\nu(g, \psi_g)F(z) = e^{\psi_g(z)\frac{r}{2n}\nu} F(g^{-1}(z)) = j(g^{-1}, z)\frac{r}{2n}\nu F(g^{-1}(z)).$$

Les théorèmes principaux

Théorème 1. Soit $s, t \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. L'expression

$$(\det x)^{-s}(\det y)^{-t} \det \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^k (\det x)^{s+k}(\det y)^{t+k}$$

définie *a priori* on $\Omega \times \Omega$ s'étend en un polynôme holomorphe sur $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$, noté $c_{s,t}^{(k)}$.

Les théorèmes principaux

Théorème 1. Soit $s, t \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. L'expression

$$(\det x)^{-s}(\det y)^{-t} \det \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^k (\det x)^{s+k}(\det y)^{t+k}$$

définie *a priori* on $\Omega \times \Omega$ s'étend en un polynôme holomorphe sur $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$, noté $c_{s,t}^{(k)}$.

Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$ on définit

$$B_{\lambda,\mu}^{(k)} = \text{res} \circ c_{\lambda-\frac{n}{r}, \mu-\frac{n}{r}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w} \right) .$$

Théorème 2. Pour tout $g \in \tilde{G}$

$$B_{\lambda,\mu}^{(k)} \circ (\pi_\lambda(g) \otimes \pi_\mu(g)) = \pi_{\lambda+\mu+2k}(g) \circ B_{\lambda,\mu}^{(k)} .$$

Références

- [1] S. Ben Saïd, JLC, K. Koufany, *Conformally covariant bidifferential operators on a simple real Jordan algebra*, Int. Math. Res. Notes (2020), 2287–2351
- [2] JLC, *Symmetry breaking differential operators, the source operator and Rodrigues type formulæ*, Pac. J. Math. **307** (2020), 79–107
- [3] JLC, *Rankin-Cohen brackets on tube-type domains*, Tunis. J. Math. **3** (2021), 551-569

Esquisse de démonstration du Théorème 1

- Formule de Leibnitz généralisée pour Q polynôme homogène sur V

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) fg = \sum_j p_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f q_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) g$$

où p_j, q_j appartiennent à $\mathcal{W}_Q = \langle \text{dérivées partielles de } Q \rangle$.

Esquisse de démonstration du Théorème 1

- Formule de Leibnitz généralisée pour Q polynôme homogène sur V

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) fg = \sum_j p_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f q_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) g$$

où p_j, q_j appartiennent à $\mathcal{W}_Q = \langle \text{dérivées partielles de } Q \rangle$.

- Structure de \mathcal{W}_{\det} comme L -module

$$\mathcal{W}_{\det} = \bigoplus_{k=0}^r \mathcal{W}_{\det}^{(k)}$$

Esquisse de démonstration du Théorème 1

- Formule de Leibnitz généralisée pour Q polynôme homogène sur V

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) fg = \sum_j p_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f q_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) g$$

où p_j, q_j appartiennent à $\mathcal{W}_Q = \langle \text{dérivées partielles de } Q \rangle$.

- Structure de \mathcal{W}_{\det} comme L -module

$$\mathcal{W}_{\det} = \bigoplus_{k=0}^r \mathcal{W}_{\det}^{(k)}$$

- Identités de Bernstein-Sato

$$p \in \mathcal{W}_{\det}^{(k)} \quad p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (\det x)^s = b_{k,d}(s) p^\sharp(x) (\det x)^{s-1}$$

où $p^\sharp(x) = p(x^{-1}) \det x$ s'étend en un polynôme sur V .

Esquisse de démonstration du Théorème 1

- Formule de Leibnitz généralisée pour Q polynôme homogène sur V

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) fg = \sum_j p_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f q_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) g$$

où p_j, q_j appartiennent à $\mathcal{W}_Q = \langle \text{dérivées partielles de } Q \rangle$.

- Structure de \mathcal{W}_{\det} comme L -module

$$\mathcal{W}_{\det} = \bigoplus_{k=0}^r \mathcal{W}_{\det}^{(k)}$$

- Identités de Bernstein-Sato

$$p \in \mathcal{W}_{\det}^{(k)} \quad p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (\det x)^s = b_{k,d}(s) p^\sharp(x) (\det x)^{s-1}$$

où $p^\sharp(x) = p(x^{-1}) \det x$ s'étend en un polynôme sur V .

- $\ell \in L, \quad c_{s,t}^{(k)}(\ell x, \ell y) = \chi(\ell)^k c_{s,t}(x, y)$

Les crochets de Rankin-Cohen

Soit res l'opérateur de restriction à la diagonale

$$\text{res} : \mathcal{O}(T_\Omega \times T_\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}(T_\Omega), \quad (\text{res } F)(z) = F(z, z) .$$

Le k ième *crochet de Rankin-Cohen* est défini par

$$B_{\lambda, \mu}^{(k)} = \text{res} \circ c_{\lambda - \frac{n}{r}, \mu - \frac{n}{r}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w} \right) .$$

Espaces de Bergman à poids

$$\mathcal{H}_\nu = \left\{ F : T_\Omega \rightarrow \mathbb{C}, \|F\|_\nu^2 := \int_{T_\Omega} |F(z)|^2 (\det y)^{\nu - \frac{2n}{r}} dx dy < +\infty \right\}.$$

Espaces de Bergman à poids

$$\mathcal{H}_\nu = \left\{ F : T_\Omega \rightarrow \mathbb{C}, \|F\|_\nu^2 := \int_{T_\Omega} |F(z)|^2 (\det y)^{\nu - \frac{2n}{r}} dx dy < +\infty \right\}.$$

Si $\nu > 1 + d(r - 1)$, alors $\mathcal{H}_\nu \neq \{0\}$, et \tilde{G} agit **unitairement** sur \mathcal{H}_ν par

$$\pi_\nu(g) F(z) = j(g^{-1}, z)^{\frac{r}{2n}\nu} F(g^{-1}(z)).$$

La transformée de Laplace et le modèle $L^2(\Omega)_\nu$

Soit $f \in C_c^\infty(\Omega)$. Sa transformée de Laplace est la fonction holomorphe $F(z)$ donnée par

$$F(z) = \int_{\Omega} e^{i(z,\xi)} f(\xi) d\xi$$

Soit $f \in L^2(\Omega)_\nu = L^2(\Omega, (\det \xi)^{-\nu + \frac{n}{r}})$. Alors

$$\|\mathcal{L}f\|_\nu^2 = 2^{\frac{n}{r} - \nu} \Gamma_\Omega \left(\nu - \frac{n}{r} \right) \|f\|_\nu^2 .$$

où

$$\|f\|_\nu^2 = \int_{\Omega} |f(\xi)|^2 (\det \xi)^{-\nu + \frac{n}{r}} d\xi$$

et

$$\Gamma_\Omega(\mu) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^r \Gamma\left(\mu - (j-1)\frac{d}{2}\right) .$$

Expression des crochets de Rankin-Cohen dans le modèle L^2

$$f \in C_c^\infty(\Omega \times \Omega)$$

$$\mathcal{L}_2 f(z, w) = \iint_{\Omega \times \Omega} e^{i((z, \xi) + (w, \zeta))} f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta .$$

À calculer :

$$\widehat{B}_{\lambda, \mu}^{(k)} = \mathcal{L}^{-1} \circ B_{\lambda, \mu}^{(k)} \circ \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}^{-1} \circ \text{res} \circ c_{\lambda - \frac{n}{r}, \mu - \frac{n}{r}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w} \right) \circ \mathcal{L}_2$$

Expression des crochets de Rankin-Cohen dans le modèle L^2

$$f \in C_c^\infty(\Omega \times \Omega)$$

$$\mathcal{L}_2 f(z, w) = \iint_{\Omega \times \Omega} e^{i((z, \xi) + (w, \zeta))} f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta.$$

À calculer :

$$\widehat{B}_{\lambda, \mu}^{(k)} = \mathcal{L}^{-1} \circ B_{\lambda, \mu}^{(k)} \circ \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}^{-1} \circ \text{res} \circ c_{\lambda - \frac{n}{r}, \mu - \frac{n}{r}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w} \right) \circ \mathcal{L}_2$$

Paramétrisation de $\Omega \times \Omega$

$$\mathbb{I} - e, +e \mathbb{I} = \{v \in V, e \pm v \in \Omega\}$$

$$\iota : \Omega \times \mathbb{I} - e, +e \mathbb{I} \longrightarrow \Omega \times \Omega, \quad \iota(u, v) = (x, y)$$

$$x = \frac{1}{2}P(u^{\frac{1}{2}})(e - v), \quad y = \frac{1}{2}P(u^{\frac{1}{2}})(e + v)$$

$$u = x + y, v = P((x + y)^{-\frac{1}{2}})(y - x)$$

$$c_{\lambda, \mu}^{(k)}(\iota(\eta, \nu)) = (\det \eta)^k c_{\lambda, \mu} \left(\frac{e - \nu}{2}, \frac{e + \nu}{2} \right) = (\det \eta)^k C_{\lambda, \nu}^{(k)}(\nu)$$

$$\widehat{B}_{\lambda, \mu}^{(k)} f(\xi) = 2^{-n} i^{rk} (\det \xi)^{k + \frac{n}{r}} \int_{\llbracket -e, +e \rrbracket} C_{\lambda - \frac{n}{r}, \mu - \frac{n}{r}}^{(k)}(\nu) f(\iota(\xi, \nu)) d\nu.$$

Propriétés d'unitarité des crochets de Rankin-Cohen

Pour $h \in C_c^\infty(\Omega)$, on définit $\Phi_{\lambda,\mu} h \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ par la formule

$$\begin{aligned} & \Phi_{\lambda,\mu}^{(k)} h(\xi, \eta) \\ &= i^k (\det \xi)^{\lambda - \frac{n}{r}} (\det \zeta)^{\mu - \frac{n}{r}} \det(\xi + \zeta)^{-\lambda - \mu - 2k + \frac{n}{r}} c_{\lambda - \frac{n}{r}, \mu - \frac{n}{r}}^{(k)}(\xi, \zeta) h(\xi + \zeta) \end{aligned}$$

Propriétés d'unitarité des crochets de Rankin-Cohen

Pour $h \in C_c^\infty(\Omega)$, on définit $\Phi_{\lambda,\mu} h \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ par la formule

$$\begin{aligned} & \Phi_{\lambda,\mu}^{(k)} h(\xi, \eta) \\ &= i^{rk} (\det \xi)^{\lambda - \frac{n}{r}} (\det \zeta)^{\mu - \frac{n}{r}} \det(\xi + \zeta)^{-\lambda - \mu - 2k + \frac{n}{r}} c_{\lambda - \frac{n}{r}, \mu - \frac{n}{r}}^{(k)}(\xi, \zeta) h(\xi + \zeta) \end{aligned}$$

Théorème :

- $\Phi_{\lambda,\mu}^{(k)}$ est (à un scalaire près) un plongement isométrique de $L_{\lambda+\mu+2k}^2(\Omega)$ dans $L_{\lambda,\mu}^2(\Omega \times \Omega)$.

Propriétés d'unitarité des crochets de Rankin-Cohen

Pour $h \in C_c^\infty(\Omega)$, on définit $\Phi_{\lambda,\mu} h \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ par la formule

$$\begin{aligned} & \Phi_{\lambda,\mu}^{(k)} h(\xi, \eta) \\ &= i^{rk} (\det \xi)^{\lambda - \frac{n}{r}} (\det \zeta)^{\mu - \frac{n}{r}} \det(\xi + \zeta)^{-\lambda - \mu - 2k + \frac{n}{r}} c_{\lambda - \frac{n}{r}, \mu - \frac{n}{r}}^{(k)}(\xi, \zeta) h(\xi + \zeta) \end{aligned}$$

Théorème :

- $\Phi_{\lambda,\mu}^{(k)}$ est (à un scalaire près) un plongement isométrique de $L_{\lambda+\mu+2k}^2(\Omega)$ dans $L_{\lambda,\mu}^2(\Omega \times \Omega)$.
- sa norme d'opérateur est égale à

$$\int_{\mathbb{I}_{-e,+e}} |C_{\lambda - \frac{n}{r}, \mu - \frac{n}{r}}^{(k)}(v)|^2 \det(e - v)^{\lambda - \frac{n}{r}} \det(e + v)^{\mu - \frac{n}{r}} dv$$

Propriétés d'unitarité des crochets de Rankin-Cohen

Pour $h \in C_c^\infty(\Omega)$, on définit $\Phi_{\lambda,\mu} h \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ par la formule

$$\begin{aligned} & \Phi_{\lambda,\mu}^{(k)} h(\xi, \eta) \\ &= i^{rk} (\det \xi)^{\lambda - \frac{n}{r}} (\det \zeta)^{\mu - \frac{n}{r}} \det(\xi + \zeta)^{-\lambda - \mu - 2k + \frac{n}{r}} c_{\lambda - \frac{n}{r}, \mu - \frac{n}{r}}^{(k)}(\xi, \zeta) h(\xi + \zeta) \end{aligned}$$

Théorème :

- $\Phi_{\lambda,\mu}^{(k)}$ est (à un scalaire près) un plongement isométrique de $L_{\lambda+\mu+2k}^2(\Omega)$ dans $L_{\lambda,\mu}^2(\Omega \times \Omega)$.
- sa norme d'opérateur est égale à

$$\int_{\|v\| \leq 1} |c_{\lambda - \frac{n}{r}, \mu - \frac{n}{r}}^{(k)}(v)|^2 \det(e - v)^{\lambda - \frac{n}{r}} \det(e + v)^{\mu - \frac{n}{r}} dv$$

- $\widehat{B}_{\lambda,\mu}^{(k)}$ est un opérateur continu de $L_{\lambda,\mu}^2(\Omega \times \Omega)$ dans $L_{\lambda+\mu+2k}^2(\Omega)$ et $\Phi_{\lambda,\mu}^{(k)}$ est l'adjoint de $\widehat{B}_{\lambda,\mu}^{(k)}$.

Covariance des crochets de Rankin-Cohen

On considère d'abord le cas où $\mathcal{H}_\nu \neq \{0\}$. Pour $w \in T_\Omega$ on pose

$$k_\nu^w(z) = \det \left(\frac{z - \bar{w}}{2i} \right)^{-\nu} \in \mathcal{H}_\nu$$

appelé *état cohérent* de \mathcal{H}_ν .

Covariance des crochets de Rankin-Cohen

On considère d'abord le cas où $\mathcal{H}_\nu \neq \{0\}$. Pour $w \in T_\Omega$ on pose

$$k_\nu^w(z) = \det \left(\frac{z - \bar{w}}{2i} \right)^{-\nu} \in \mathcal{H}_\nu$$

appelé *état cohérent* de \mathcal{H}_ν .

$\{k_\nu^w, w \in T_\Omega\}$ est un système total dans \mathcal{H}_ν .

$$g \in \tilde{G}, \quad \pi_\nu(g) k_\nu^w = \overline{j(g^{-1}, w)}^{-\frac{r}{2n}\nu} k_\nu^{g(w)}$$

Covariance des crochets de Rankin-Cohen

On considère d'abord le cas où $\mathcal{H}_\nu \neq \{0\}$. Pour $w \in T_\Omega$ on pose

$$k_\nu^w(z) = \det \left(\frac{z - \bar{w}}{2i} \right)^{-\nu} \in \mathcal{H}_\nu$$

appelé *état cohérent* de \mathcal{H}_ν .

$\{k_\nu^w, w \in T_\Omega\}$ est un système total dans \mathcal{H}_ν .

$$g \in \tilde{G}, \quad \pi_\nu(g) k_\nu^w = \overline{j(g^{-1}, w)}^{-\frac{r}{2n}\nu} k_\nu^{g(w)}$$

$$\begin{cases} \varphi_\nu(z) = k_\nu^{ie}(z) & = \det \left(\frac{z+ie}{i} \right)^{-\nu} \\ \psi_\nu(\xi) & = e^{-\operatorname{tr} \xi} (\det \xi)^{\nu - \frac{n}{r}} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\psi_\nu = \Gamma_\Omega(\nu)\varphi_\nu$$

Petit résumé (à l'usage de ceux/celles qui souffrent)

modèle \mathcal{H}_ν

$$\mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\mu$$

$$B_{\lambda,\mu}^{(k)} : \mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{H}_{\lambda+\mu+2k}$$

$$B_{\lambda,\mu}^{(k)*} : \mathcal{H}_{\lambda+\mu+2k} \rightarrow \mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\mu$$

φ_ν

modèle $L_\nu^2(\Omega)$

$$L_\lambda^2(\Omega) \otimes L_\mu^2(\Omega)$$

$$\widehat{B}_{\lambda,\mu}^{(k)} : L_\lambda^2 \otimes L_\mu^2(\Omega) \rightarrow L_{\lambda+\mu+2k}^2(\Omega)$$

$$\Phi_{\lambda,\mu}^{(k)} : L_{\lambda+\mu+2k}^2(\Omega) \rightarrow L_\lambda^2 \otimes L_\mu^2(\Omega)$$

ψ_ν

- $B_{\lambda,\mu}^{(k)*}$ satisfait la relation de covariance pour les translations et l'action du groupe L

- $B_{\lambda,\mu}^{(k)*}$ satisfait la relation de covariance pour les translations et l'action du groupe L
- le **calcul décisif**, via la transformation de Laplace

$$B_{\lambda,\mu}^{(k)*} \varphi_{\lambda+\mu+2k}(z_1, z_2) = i^{rk} \Gamma_{\Omega}(\lambda + k) \Gamma_{\Omega}(\mu + k) \dots$$

$$\det(z_1 - z_2)^k \det\left(\frac{z_1 + ie}{i}\right)^{-\lambda-k} \det\left(\frac{z_2 + ie}{i}\right)^{-\mu-k}$$

- $B_{\lambda,\mu}^{(k)*}$ satisfait la relation de covariance pour les translations et l'action du groupe L
- le **calcul décisif**, via la transformation de Laplace

$$B_{\lambda,\mu}^{(k)*} \varphi_{\lambda+\mu+2k}(z_1, z_2) = i^{rk} \Gamma_{\Omega}(\lambda + k) \Gamma_{\Omega}(\mu + k) \dots$$

$$\det(z_1 - z_2)^k \det\left(\frac{z_1 + ie}{i}\right)^{-\lambda-k} \det\left(\frac{z_2 + ie}{i}\right)^{-\mu-k}$$

- on calcule $B_{\lambda,\mu}^{(k)*} k_{\lambda+\mu+2k}^w$ pour tout $w \in T_{\Omega}$ en utilisant les deux résultats précédents

- $B_{\lambda,\mu}^{(k)*}$ satisfait la relation de covariance pour les translations et l'action du groupe L
- le **calcul décisif**, via la transformation de Laplace

$$B_{\lambda,\mu}^{(k)*} \varphi_{\lambda+\mu+2k}(z_1, z_2) = i^{rk} \Gamma_{\Omega}(\lambda + k) \Gamma_{\Omega}(\mu + k) \dots$$

$$\det(z_1 - z_2)^k \det\left(\frac{z_1 + ie}{i}\right)^{-\lambda-k} \det\left(\frac{z_2 + ie}{i}\right)^{-\mu-k}$$

- on calcule $B_{\lambda,\mu}^{(k)*} k_{\lambda+\mu+2k}^w$ pour tout $w \in T_{\Omega}$ en utilisant les deux résultats précédents
- on obtient la relation de covariance

$$B_{\lambda,\mu}^{(k)*} \circ \pi_{\lambda+\mu+2k}(g) = (\pi_{\lambda}(g) \otimes \pi_{\mu}(g)) \circ B_{\lambda,\mu}^{(k)*}$$

en la vérifiant sur les états cohérents

- $B_{\lambda,\mu}^{(k)*}$ satisfait la relation de covariance pour les translations et l'action du groupe L
- le **calcul décisif**, via la transformation de Laplace

$$B_{\lambda,\mu}^{(k)*} \varphi_{\lambda+\mu+2k}(z_1, z_2) = i^{rk} \Gamma_{\Omega}(\lambda + k) \Gamma_{\Omega}(\mu + k) \dots$$

$$\det(z_1 - z_2)^k \det\left(\frac{z_1 + ie}{i}\right)^{-\lambda-k} \det\left(\frac{z_2 + ie}{i}\right)^{-\mu-k}$$

- on calcule $B_{\lambda,\mu}^{(k)*} k_{\lambda+\mu+2k}^w$ pour tout $w \in T_{\Omega}$ en utilisant les deux résultats précédents
- on obtient la relation de covariance

$$B_{\lambda,\mu}^{(k)*} \circ \pi_{\lambda+\mu+2k}(g) = (\pi_{\lambda}(g) \otimes \pi_{\mu}(g)) \circ B_{\lambda,\mu}^{(k)*}$$

en la vérifiant sur les états cohérents

- on obtient la covariance pour le crochet de Rankin-Cohen

- $B_{\lambda,\mu}^{(k)*}$ satisfait la relation de covariance pour les translations et l'action du groupe L
- le **calcul décisif**, via la transformation de Laplace

$$B_{\lambda,\mu}^{(k)*} \varphi_{\lambda+\mu+2k}(z_1, z_2) = i^{rk} \Gamma_{\Omega}(\lambda + k) \Gamma_{\Omega}(\mu + k) \dots$$

$$\det(z_1 - z_2)^k \det\left(\frac{z_1 + ie}{i}\right)^{-\lambda-k} \det\left(\frac{z_2 + ie}{i}\right)^{-\mu-k}$$

- on calcule $B_{\lambda,\mu}^{(k)*} k_{\lambda+\mu+2k}^w$ pour tout $w \in T_{\Omega}$ en utilisant les deux résultats précédents
- on obtient la relation de covariance

$$B_{\lambda,\mu}^{(k)*} \circ \pi_{\lambda+\mu+2k}(g) = (\pi_{\lambda}(g) \otimes \pi_{\mu}(g)) \circ B_{\lambda,\mu}^{(k)*}$$

en la vérifiant sur les états cohérents

- on obtient la covariance pour le crochet de Rankin-Cohen
- on étend aux valeurs complexes de λ, μ

L' orthogonalité des polynômes $C_{\lambda,\mu}^{(k)}$

$$c_{s,t}^{(k)} = (\det x)^{-s} (\det y)^{-t} \det \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^k (\det x)^{s+k} (\det y)^{t+k}$$

$$v \in]-e, +e[, \quad C_{s,t}^{(k)}(v) = c_{s,t} \left(\frac{e-v}{2}, \frac{e+v}{2} \right)$$

L' orthogonalité des polynômes $C_{\lambda,\mu}^{(k)}$

$$c_{s,t}^{(k)} = (\det x)^{-s} (\det y)^{-t} \det \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^k (\det x)^{s+k} (\det y)^{t+k}$$

$$v \in] -e, +e [, \quad C_{s,t}^{(k)}(v) = c_{s,t} \left(\frac{e-v}{2}, \frac{e+v}{2} \right)$$

Théorème Pour $s, t > \frac{d(r-1)}{2}$, les polynômes $\{C_{s,t}^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$ forment une famille orthogonale dans $L^2(] -e, +e [, \det(e-v)^\lambda \det(e+v)^\mu)$.

L' orthogonalité des polynômes $C_{\lambda,\mu}^{(k)}$

$$c_{s,t}^{(k)} = (\det x)^{-s} (\det y)^{-t} \det \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^k (\det x)^{s+k} (\det y)^{t+k}$$

$$v \in] -e, +e [, \quad C_{s,t}^{(k)}(v) = c_{s,t} \left(\frac{e-v}{2}, \frac{e+v}{2} \right)$$

Théorème Pour $s, t > \frac{d(r-1)}{2}$, les polynômes $\{C_{s,t}^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$ forment une famille orthogonale dans $L^2(] -e, +e [, \det(e-v)^\lambda \det(e+v)^\mu)$.

C'est une traduction du fait que, pour $k \neq l$, les sous-espaces $Im(B_{\lambda,\mu}^{(k)*})$ et $Im(B_{\lambda,\mu}^{(l)*})$ sont des sous-représentations non équivalentes du produit tensoriel $\mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\mu$, donc orthogonales.


L' orthogonalité des polynômes $C_{\lambda,\mu}^{(k)}$

$$c_{s,t}^{(k)} = (\det x)^{-s} (\det y)^{-t} \det \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^k (\det x)^{s+k} (\det y)^{t+k}$$

$$v \in] -e, +e [, \quad C_{s,t}^{(k)}(v) = c_{s,t} \left(\frac{e-v}{2}, \frac{e+v}{2} \right)$$

Théorème Pour $s, t > \frac{d(r-1)}{2}$, les polynômes $\{C_{s,t}^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$ forment une famille orthogonale dans $L^2(] -e, +e [, \det(e-v)^\lambda \det(e+v)^\mu)$.

C'est une traduction du fait que, pour $k \neq l$, les sous-espaces $Im \left(B_{\lambda,\mu}^{(k)*} \right)$ et $Im \left(B_{\lambda,\mu}^{(l)*} \right)$ sont des sous-représentations non équivalentes du produit tensoriel $\mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\mu$, donc orthogonales.

Dans le cas de l'algèbre de Jordan $V = \mathbb{R}$, la relation de définition des polynômes n'est autre que la *formule de Rodrigues* pour les polynômes de Jacobi. 

MERCI DE VOTRE ATTENTION!