

Test du 14 Novembre 2019

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 2h.

Exercice 1. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs donné par

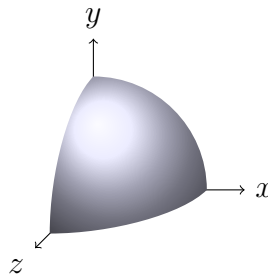
$$\mathbf{f}(x, y) = (2xy + y^2 - 1, 2xy + x^2).$$

- (1) Calculer la circulation de \mathbf{f} le long du segment de $A = (1, 0)$ vers $B = (0, 1)$.
- (2) Déterminer si \mathbf{f} dérive d'un potentiel h , *i.e.* $\mathbf{f} = \nabla h$, calculer h .
- (3) Calculer la circulation de \mathbf{f} le long de la courbe Γ paramétrée par

$$\gamma(t) = (\cos^5(t), \sin^4(t)), \quad t = \pi/2 \rightarrow t = \pi.$$

Exercice 2. Soit D le $\frac{1}{8}$ de la boule unité, domaine de \mathbb{R}^3 limité par les surfaces d'équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \text{et } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$



Notons Σ le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur. Notons Σ_1 la partie de Σ contenue dans la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$ (le complémentaire de Σ_1 dans Σ).

Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs donné par $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$.

- (1) Calculer le flux de \mathbf{f} à travers Σ_1 .
- (2) Calculer le flux de \mathbf{f} à travers Σ_2 .
- (3) Calculer le flux de \mathbf{f} à travers Σ en utilisant la formule d'Ostrogradsky.
- (4) En utilisant la formule de Stokes calculer la circulation de \mathbf{f} le long de la courbe C , bord de Σ_1 , orientée dans le sens trigonométrique, par rapport à l'orientation de Σ_1 (dont le vecteur normal est vers l'extérieur).

Exercice 3 Soit les champs scalaires $\mathbf{f} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{g} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définis par $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(X) &= \text{Tr}(X) \\ \mathbf{g}(X) &= (\text{Tr}(X))^3 \end{aligned}$$

où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

- (a) Montrer que \mathbf{f} et \mathbf{g} sont différentiables.
- (b) Calculer la différentielle \mathbf{f} .
- (c) Calculer la différentielle \mathbf{g} .