Test du 14 Novembre 2019

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 2h.

Exercice 1. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{f}(x, y) = (2xy + y^2 - 1, 2xy + x^2).$$

(1) Calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long du segment de $A = (1, 0)$ vers $B = (0, 1)$.
(2) Déterminer si $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel h, calculer h.
(3) Calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long de la courbe Γ paramétrée par

$$\gamma(t) = (\cos^5(t), \sin^4(t)), \quad t = \pi/2 \to t = \pi.$$

Réponse. (1) On paramètre le segment $[A, B]$ avec

$$\alpha(t) = (1 - t, t), \; t = 0 \to t = 1$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\ell &= \int_0^1 \mathbf{f}(\alpha(t) \cdot \alpha'(t)dt \\ &= \int_0^1 (2(1-t) + t^2 - 1, 2(1-t) + t^2) \cdot (-1, 1)dt = \int_0^1 dt = 1 \end{aligned}$$

(2) si $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel h, i.e. $\nabla h = \mathbf{f}$, alors

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = 2xy + y^2 - 1 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = 2xy + x^2 \qquad (2)$$

de (1) on déduit que

$$h(x, y) = x^2y + xy^2 - x + \varphi(y) \qquad (3)$$

En dérivant (3) par rapport à y et en comparant avec (2), on obtient

$$2xy + x^2 = x^2 + 2xy + \varphi'(y)$$

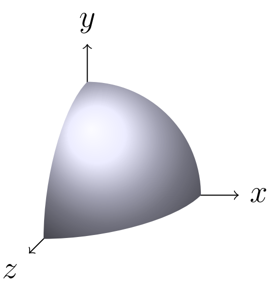
Donc $\varphi = c$ une constante. Ainsi $h(x, y) = x^2y + xy^2 - x + c$.

(3) Notons que $\gamma(\pi/2) = (0, 1) = B$ et $\gamma(\pi) = (-1, 0) = C$.
La circulation d'un champ gradient ne dépend que des extrémités de la courbe sur laquelle elle circule, on a

$$\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\ell = h(C) - h(B) = -(-1) + k - 0 - k = 1$$

Exercice 2. Soit D le $\frac{1}{8}$ de la boule unité, domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par les surfaces d'équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \text{et} \;\; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$



Notons Σ le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur. Notons Σ_1 la partie de Σ contenue dans la surface $x^2+y^2+z^2=1$ et $\Sigma_2=\Sigma\setminus\Sigma_1$ (le complémentaire de Σ_1 dans Σ).

Soit $\mathbf{f}$ le champ de vecteurs donnée par $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,y,z)$.

(1) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers Σ_1.

(2) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers Σ_2.

(3) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers Σ en utilisant la formule d'Ostrogradsky.

(4) Calculer l'aire de Σ_1 et de Σ_2.

(5) Calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long de la courbe C, bord de Σ_1, orientée dans le sens trigonométrique, par rapport à l'orientation de Σ_1 (dont le vecteur normal est vers l'extérieur).

Réponse. Le bord de D est composé du huitième de la sphère unité : $\Sigma_1=\{x^2+y^2+z^2=1,\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$ et des quarts de disques $S_1=\{z=0,\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0, y\geq 0\}$, $S_2=\{x=0,\ z^2+y^2\leq 1,\ z\geq 0, y\geq 0\}$ et $S_3=\{y=0,\ x^2+z^2\leq 1,\ x\geq 0, z\geq 0\}$. On a alors $\Sigma=\Sigma_1\cup S_1\cup S_2\cup S_3$ et $\Sigma_2=S_1\cup S_2\cup S_3$.

(1) Une paramétrisation de Σ_1 est

$$[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]\ni(\theta,\varphi)\mapsto\gamma_1(\theta,\varphi)=\begin{cases}x(\theta,\varphi)=\cos\theta\cos\varphi\\ y(\theta,\varphi)=\cos\theta\sin\varphi\\ z(\theta,\varphi)=\sin\theta\end{cases}$$

On calcul le vecteur normal

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma_1(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\gamma_1(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} &= \begin{pmatrix}-\sin\theta\cos\varphi\\ -\sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\cos\varphi\theta\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\cos^2\theta\cos\varphi\\ -\cos^2\theta\sin\varphi\\ -\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Comme ce vecteur est dirigé vers l'intérieur, le flux de $\mathbf{f}$ à travers Σ_1 orientée vers l'extérieur vaut

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma_1}\mathbf{f}\cdot dS\\ =&\iint_{[0,\pi/2]^2}(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta)\cdot(\cos^2\theta\cos\varphi,\cos^2\theta\sin\varphi,\cos\theta\sin\theta)d\theta d\varphi\\ =&\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta d\varphi=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(2) On sait que $\Sigma_2 = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ et le flux de $\mathbf{f}$ à travers chaque surface Σ_2 est la somme des flux de $\mathbf{f}$ à travers chaque surface S_i. Comme pour chaque surface S_i le vecteur normal est orthogonal à S_i, ces flux est nul. Donc $\iint_{\Sigma_2} \mathbf{f} \cdot dS = 0$: par exemple, pour S_1 qui a comme paramétrisation $\sigma_1 : [0,1] \times [0, \pi/2] \ni (r, \theta) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, le vecteur normal est $(0,0,r)$ et donc $\iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (\cos\theta, \sin\theta, 0) \cdot (0,0,r) dr d\theta = 0$.

(3) D'après la formule formule d'Ostrogradsky

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma f \cdot dS &= \iiint_D \operatorname{div}(\mathbf{f})(x,y,z) dxdydz \\ &= \iiint_D 3 \times dxdydz \\ &= 3 \times \operatorname{vol}(D) \end{aligned}$$

Pour calculer $\operatorname{vol}(D)$ on utilise les coordonnées sphériques

$$[0,1] \times]0, \pi/2[\times]0, \pi/2[\ni (r, \theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Le déterminant Jacobien de cette transformation étant $r^2\cos\theta$, on a

$$\operatorname{vol}(D) = \iiint_D dxdydz = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos\theta dr d\theta d\varphi = \frac{\pi}{6}$$

Donc

$$\iint_\Sigma f \cdot dS = 3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

(On peut deviner le volume de D : c'est le $\frac{1}{8}$ du volume de la boule unité, *i.e.* $\frac{1}{8} \times \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$).

(4) L'aire de Σ_1 est le $\frac{1}{8}$ de celui de la sphère unité, et vaut $\frac{1}{8} \times 4\pi = \frac{\pi}{2}$.

Σ_2 est la réunion des 3 quants de disques unité, son aire est donc $\frac{3}{4} \times \pi = \frac{3\pi}{4}$.

(5) La circulation le long de C est égale à la somme des circulations sur le bord de chacunes des faces S_1, S_2 et S_3.

figure

Sur les arrêtes droites, les circulations se compenses deux à deux. D'après la formule de Stokes, pour S_1 par exemple,

$$\int_{\partial S_1} \mathbf{f} \cdot d\ell = \iint_{S_1} \operatorname{rot}(\mathbf{f}) \cdot dS$$

Comme $\operatorname{rot}(\mathbf{f}) = (0,0,0)$, on a $\int_{\partial S_1} \mathbf{f} \cdot d\ell = 0$. On montre de même que $\int_{\partial S_2} \mathbf{f} \cdot d\ell = 0$ et $\int_{\partial S_3} \mathbf{f} \cdot d\ell = 0$. Donc $\int_{\Sigma_1} \mathbf{f} \cdot d\ell = 0$.

Exercice 3 Soit les champs scalaires $\mathbf{f} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{g} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définis par $\forall X \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(X) &= \operatorname{Tr}(X) \\ \mathbf{g}(X) &= (\operatorname{Tr}(X))^3 \end{aligned}$$

(a) Montrer que $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont différentiables.

(b) Calculer la différentielle $\mathbf{f}$.

(c) Calculer la différentielle $\mathbf{g}$.

Réponse. (a) Comme $\mathbf{f}$ est linéaire, $\mathbf{f}$ est différentiable en tout point et comme $\mathbf{g} = h \circ \mathbf{f}$ où h est la fonction différentiable $h(t) = t^3$, donc $\mathbf{g}$ est différentiable en tout point.

(b) Comme $\mathbf{f}$ est linéaire, alors $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $D\mathbf{f}(X) = \mathbf{f}$

(c) On a $\mathbf{g} = h \circ \mathbf{f}$, donc $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $D\mathbf{g}(X) = Dh(\mathbf{f}(X)) \circ D\mathbf{f}(X)$. On a aussi $Dh(t)(s) = h'(t)s = 3t^2 s$ et $D\mathbf{f}(X)(H) = \mathbf{f}(H) = \mathrm{Tr}(H)$. Donc pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$D_H\mathbf{g}(X) = D\mathbf{g}(X)(H) = Dh(\mathbf{f}(X))(D\mathbf{f}(X)H) = Dh(\mathbf{f}(X))(\mathrm{Tr}(H)) = 3(\mathrm{Tr}(X))^2\mathrm{Tr}(H)$$