Test du 15 Novembre 2018

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 2h.

Execice 1.

Soit $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et de la norme correspondante.

Calculer la différentielle des champs de vecteurs suivants :

(1) $\mathbf{f}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}_1(x) = \langle x | x_0 \rangle$, où x_0 est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$;

(2) $\mathbf{f}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}_2(x) = \|x\|^2$;

(3) $\mathbf{f}_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}_3(x) = \|x\|^4$.

Exercice 2.

Soit C le carré orienté de sommets consécutifs $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(1,-1)$.

Calculer $\int_C \omega$ où ω est la forme différentielle définie par

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx.$$

Exercice 3.

Soit le champ de vecteurs $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x+z, -3xy, x^2).$$

(1) Calculer la circulation de ce champ de vecteurs entre les points $O(0,0,0)$ et $A(1,2,-1)$ le long des chemins suivants :

(a) Γ_1 : $(x = t^2,\ y = 2t,\ z = -t)$;

(b) Γ_2 : le segment $[O, A]$.

(2) Que peut-on en déduire sur $\mathbf{f}$.

Exercice 4.

Soit la surface

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

On note Γ son bord orienté et on considère la forme différentielle

$$\omega = xy^2dx + 2xydy.$$

Calculer $\int_\Gamma \omega$:

(a) en utilisant une paramétrisation de Γ;

(b) en utilisant la formule de Green.