Test du 15 Novembre 2018

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 2h.

Execice 1.

Soit $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et de la norme correspondante. Calculer la différentielle des champs de vecteurs suivants :

(1) $\mathbf{f}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}_1(x) = \langle x|x_0\rangle$, où x_0 est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$.

(2) $\mathbf{f}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}_2(x) = \|x\|^2$.

(3) $\mathbf{f}_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}_3(x) = \|x\|^4$.

Corrigé. *(1) L'application définie par* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(x) = \langle x|x_0\rangle$ *est linéaire, donc elle est égale à sa différentielle en tout* $x \in \mathbb{R}^n$, *i.e.* $\boxed{d\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}}$

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\mathbf{f}_2(x+v) = \mathbf{f}_2(x) = \|x+v\|^2 - \|x\|^2 = 2\langle x|v\rangle + \|v\|^2$$

donc $\boxed{d\mathbf{f}_2(x)(v) = 2\langle x|v\rangle}$.

(3) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(t) = t^2$, *alors* $\mathbf{f}_3 = g \circ \mathbf{f}_2$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$,

$$d\mathbf{f}_3(x) = dg(\mathbf{f}_2(x)) \circ d\mathbf{f}_2(x)$$

d'où, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$

$$d\mathbf{f}_3(x)(v) = dg(\mathbf{f}_2(x))\,[d\mathbf{f}_2(x)(v)] = 2\|x\|^2\,[2\langle x|v\rangle] = \boxed{4\|x\|^2\langle x|v\rangle}$$

Exercice 2.

Soit C le carré orienté de sommets consécutifs $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(1,-1)$.

Calculer $\int_C \omega$ où ω est la forme différentielle définie par

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx.$$

Corrigé. *Le carrée est obtenu en recollant 4 morceaux de courbes de classe* C^1, *on a donc*

$$\int_C \omega = \int_{AB} \omega + \int_{BC} \omega + \int_{CD} \omega + \int_{DA} \omega$$

On paramétrise le segment AB *avec*

$$\alpha(x) = (-t, 1),\ t = -1 \to t = 1$$

et le long de ce segment $\omega = \frac{1}{1+t^2}dt$*, donc*

$$\int_{AB} \omega = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}$$

On trouve la même chose sur les autres segments, d'où

$$\boxed{\int_{C} \omega = 2\pi}$$

Exercice 3.
Soit le champ de vecteurs $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x + z, -3xy, x^2).$$

(1) Calculer la circulation de ce champ de vecteurs entre les points $O(0, 0, 0)$ et $A(1, 2, -1)$ le long des chemins suivants :
(a) Γ_1 : $(x = t^2,\ y = 2t,\ z = -t)$;
(b) Γ_2 : le segment $[O, A]$.
(2) Que peut-on en déduire sur $\mathbf{f}$.

Corrigé. *(1) (a) Soit*

$$\alpha(t) = (t^2, 2t, -t) \quad t = 0 \to t = 1$$

la paramétrisation du chemin le long de Γ_1 *allant de* O *à* A*. Donc*

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\ell &= \int_0^1 \mathbf{f}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_0^1 -t^4 - 10t^3 - 2t^2 \\ &= -\left(\frac{1}{5} + \frac{5}{2} + \frac{2}{3}\right) = \boxed{-\frac{101}{30}} \end{aligned}$$

(b) Le segment $[O, A]$ *est paramétré par*

$$\beta(t) = (t, 2t, -t), \quad t = 0 \to t = 1$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{[O,A]} \mathbf{f} \cdot d\ell &= \int_0^1 \mathbf{f}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt \\ &= \int_0^1 -13t^2 dt \\ &= \boxed{-\frac{13}{3}} \end{aligned}$$

(2) Comme $\int_{\Gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\ell \neq \int_{[O,A]} \mathbf{f} \cdot d\ell$, le champ de vecteurs $\mathbf{f}$ ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 4.
Soit la surface

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

On note Γ son bord orienté et on considère la forme différentielle

$$\omega = xy^2 dx + 2xydy.$$

Calculer $\int_\Gamma \omega$:
(a) en utilisant une paramétrisation de Γ;
(b) en utilisant la formule de Green.

Corrigé. *La surface S en question est la quart (nord-est) du disque unité. Elle est paramétrée par*

$$\sigma(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta),\quad 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Le bord Γ de S comporte 3 parties,

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_1 & = & \{\gamma_1(t) = (t, 0),\ \ t = 0 \to t = 1\} \\ \Gamma_2 & = & \{\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t),\ \ t = 0 \to t = \pi/2\} \\ \Gamma_3 & = & \{\gamma_3(t) = (0, t),\ \ t = 1 \to t = 0\} \end{array}$$

(a) On a

$$\int_\Gamma \omega \ = \ \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega$$

On montre assez facilement que $\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_3} \omega = 0$, donc

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Gamma \omega & = & \displaystyle\int_{\Gamma_2} \omega \\ & = & \displaystyle\int_0^{\pi/2} -\cos t \sin^3 t + 2\sin t \cos^2 t dt \\ & = & -\left[\dfrac{\sin^4 t}{4}\right]_0^{\pi/2} - 2\left[\dfrac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\dfrac{5}{12}}. \end{array}$$

(b) On pose $P(x, y) = xy^2$ et $Q(x, y) = 2xy$ de sorte que $\omega = Pdx + Qdy$. D'après la formule de Green

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Gamma \omega & = & \displaystyle\int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \\ & = & \displaystyle\int\int_S (2y - 2xy) dxdy \end{array}$$

On passant en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) avec $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \omega &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (2r\sin\theta - 2r^2\sin\theta\cos\theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^1 (2r^2 - r^3) dr = \boxed{\frac{5}{12}}.
\end{aligned}$$