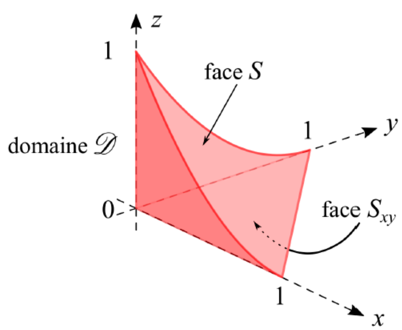
Mathématiques pour l'ingénieur
Test du 17 Novembre 2022 – durée : 1h

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère cartésien orthonormal direct (O, e_1, e_2, e_3) on considère le domaine

$$\mathscr{D} = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x + y \leq 1, z \leq (x + y - 1)^2\right\}.$$



Soient S_{xy} (respectivement S_{xz} et S_{yz}) sa face incluse dans le plan (Oxy) (respectivement (Oxz) et (Oyz)). Sa face non-plane et oblique est

$$S = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x + y \leq 1, z = (x + y - 1)^2\right\}.$$

Le bord de $\mathscr{D}$ est donc $\partial\mathscr{D} = S \cup S_{xy} \cup S_{xz} \cup S_{yz}$.

Soit le champ de vecteurs $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z).$$

(1) Donner le vecteur normal unitaire n_{xy} à la surface S_{xy} sortant de $\mathscr{D}$. En déduire le flux $\iint_{S_{xy}} \mathbf{f} \cdot n_{xy} dS$, de $\mathbf{f}$, sortant de $\mathscr{D}$ à travers S_{xy}.
Calculer de même les flux $\iint_{S_{xz}} \mathbf{f} \cdot n_{xz} dS$ et $\iint_{S_{yz}} \mathbf{f} \cdot n_{yz} dS$ après avoir déterminer n_{xz} et n_{yz}.

(2) Calculer la divergence de $\mathbf{f}$. En déduire l'intégrale

$$\iiint_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) dxdydz.$$

(3) En appliquant le théorème de la divergence, calculer le flux de $\mathbf{f}$, sortant de $\mathscr{D}$ à travers la surface non-plane S.

(4) En appliquant le théorème de Stokes, calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long du bord de S_{xy} (en précisant le sens de circulation choisi).

Corrigé l'exercice 1. (1) Sur la surface S_{xy} qui est plane et horizontale, $n_{xy} = -e_3 = (0, 0, -1)$ est le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur de $\mathscr{D}$. Comme $z = 0$ sur cette surface, $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, 0)$ donc il est perpendiculaire à n_{xy}. Par conséquent, le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_{xy} est nul : $\iint_{S_{xy}} \mathbf{f} \cdot n_{xy} dS = 0$.
On a de même $\iint_{S_{xz}} \mathbf{f} \cdot n_{xz} dS = 0$ et $\iint_{S_{yz}} \mathbf{f} \cdot n_{yz} dS = 0$.

(2) On a $\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 3$. Donc

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) dxdydz \\
&= \iiint_{\mathscr{D}} 3dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{(x+y-1)^2} 3dz\right) dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 3(x + y - 1)^2 dy\right) dx = \int_0^1 \left[(x + y - 1)^3\right]_0^{1-x} dx \\
&= -\int_0^1 (x - 1)^3 dx = -\left[\frac{(x - 1)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(3) D'après le théorème de la divergence, le flux de $\mathbf{f}$ à travers la surface $\partial\mathscr{D}$ est

$$\iint_{\partial\mathscr{D}} \mathbf{f}\cdot ndS = \iiint_{\mathscr{D}} \operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z)dxdydz = \frac{1}{4}$$

Or $\partial\mathscr{D} = S \cup S_{xy} \cup S_{xz} \cup S_{yz}$, donc

$$\frac{1}{4} = \iint_S \mathbf{f}\cdot n_S dS + \iint_{S_{xy}} \mathbf{f}\cdot n_{xy} dS + \iint_{S_{xz}} \mathbf{f}\cdot n_{xz} dS + \iint_{S_{yz}} \mathbf{f}\cdot n_{yz} dS$$

En tenant compte de la question (1), on a

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot n_S dS = \frac{1}{4}$$

.

(4) D'après le théorème de Stokes

$$\oint_{\partial S_{xy}} \mathbf{f}\cdot d\ell = \iint_{S_{xy}} \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot n_{xy} dS$$

Or

$$\operatorname{rot}\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\oint_{\partial S_{xy}} \mathbf{f}\cdot d\ell = 0$

Exercice 2. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$\mathbf{f}(x,y) = (2xy + y^2 - 1, 2xy + x^2).$$

(1) Calculer l'intégrale curviligne du champ $\mathbf{f}$ le long du segment de $A = (1,0)$ vers $B = (0,1)$. (utiliser une paramétrisation du segment $[AB]$)

(2) Montrer que $\mathbf{f}$ est un champ gradient.

(3) Déterminer alors h tel que $\mathbf{f} = \nabla h$.

(4) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\ell$ le long de la courbe Γ parametrée par

$$\gamma(t) = \left(\cos^5 t, \sin^4 t\right), \quad t : \frac{\pi}{2} \to \pi.$$

Corrigé l'exercice 2. (1) Une paramétrisation du segment $[AB]$ est donnée par

$$\gamma(t) = (1-t, t), \quad t : 0 \to 1$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{[AB]} \mathbf{f}\cdot d\ell &= \int_0^1 (\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt \\ &= \int_0^1 f(2(1-t)t + t^2 - 1, 2(1-t)t + (1-t)^2)\cdot(-1,1)dt \\ &= \int_0^1 dt = 1 \end{aligned}$$

(2) On pose $P(x,y) = 2xy + y^2 - 1$ et $Q(x,y) = 2xy + x^2$ On a

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

donc $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel h.

(3) Si $\mathbf{f} = \nabla h$ alors

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2 - 1 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2xy + x^2 \qquad (2)$$

On intègre l'equation (1), donc

$$h(x,y) = x^2y + xy^2 - x + g(y) \qquad (3)$$

où $g(y)$ est constante par rapport à x. On dérive (3) par rapport à y et on compare à (2). On trouve $y'(y) = 0$, i.e. g est une constante c. Ainsi

$$h(x,y) = x^2y + xy^2 - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(4) Comme $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel, la circulation de $\mathbf{f}$ le long de la courbe Γ est

$$\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\ell = h(\gamma(\pi)) - h(\gamma(\pi/2)) = h(-1,0) - h(1,0) = 1$$