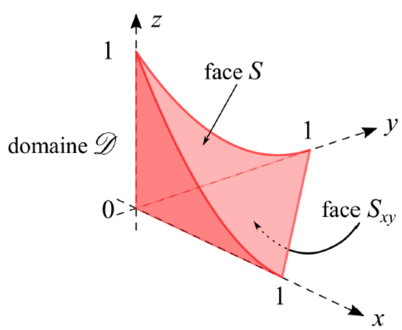
Mathématiques pour l'ingénieur
Test du 17 Novembre 2022 – durée : 1h

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère cartésien orthonormal direct (O, e_1, e_2, e_3) on considère le domaine

$$\mathscr{D} = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x+y \leq 1, z \leq (x+y-1)^2\right\}.$$



Soient S_{xy} (respectivement S_{xz} et S_{yz}) sa face incluse dans le plan (Oxy) (respectivement (Oxz) et (Oyz)). Sa face non-plane et oblique est

$$S = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x+y \leq 1, z = (x+y-1)^2\right\}.$$

Le bord de $\mathscr{D}$ est donc $\partial\mathscr{D} = S \cup S_{xy} \cup S_{xz} \cup S_{yz}$.

Soit le champ de vecteurs $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,z).$$

(1) Donner le vecteur normal unitaire n_{xy} à la surface S_{xy} sortant de $\mathscr{D}$. En déduire le flux $\iint_{S_{xy}} \mathbf{f} \cdot n_{xy} dS$, de $\mathbf{f}$, sortant de $\mathscr{D}$ à travers S_{xy}.
Calculer de même les flux $\iint_{S_{xz}} \mathbf{f} \cdot n_{xz} dS$ et $\iint_{S_{yz}} \mathbf{f} \cdot n_{yz} dS$ après avoir déterminer n_{xz} et n_{yz}.

(2) Calculer la divergence de $\mathbf{f}$. En déduire l'intégrale

$$\iiint_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \mathbf{f}(x,y,z) dxdydz.$$

(3) En appliquant le théorème de la divergence, calculer le flux de $\mathbf{f}$, sortant de $\mathscr{D}$ à travers la surface non-plane S.

(4) En appliquant le théorème de Stokes, calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long du bord de S_{xy} (en précisant le sens de circulation choisi).

Exercice 2. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$\mathbf{f}(x,y) = (2xy + y^2 - 1, 2xy + x^2).$$

(1) Calculer l'intégrale curviligne du champ $\mathbf{f}$ le long du segment de $A = (1,0)$ vers $B = (0,1)$. (utiliser une paramétrisation du segment $[AB]$)

(2) Montrer que $\mathbf{f}$ est un champ gradient.

(3) Déterminer alors h tel que $\mathbf{f} = \nabla h$.

(4) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\ell$ le long de la courbe Γ parametrée par

$$\gamma(t) = \left(\cos^5 t, \sin^4 t\right), \quad t : \frac{\pi}{2} \to \pi.$$