

Test du 4 Novembre 2021

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 1h.

Exercice 1. Soit les champs scalaires $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définis par,

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(x) &= \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{g}(x) &= \frac{1}{\|x\|^4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}.\end{aligned}$$

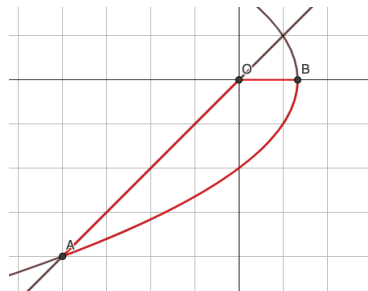
- (a) Montrer que \mathbf{f} et \mathbf{g} sont différentiables dans leurs domaines respectifs.
- (b) Calculer la différentielle \mathbf{f} .
- (c) Calculer la différentielle \mathbf{g} .

Exercice 2. Soit le champs de vecteurs $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$(x, y) \mapsto \mathbf{f}(x, y) = (xy^2, x^2y)$$

On pose $P(x, y) = xy^2$ et $Q(x, y) = x^2y$.

- (1) (a) Calculer $\text{rot}(\mathbf{f})$.
- (b) Montrer que l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} \mathbf{f}$ est nulle lorsque Γ est une courbe simple fermée.
- (2) Soit la courbe $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où
 - Γ_1 : l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 4 - 3x$ limitée en A par la droite d'équation $y = x$ et en B par l'axe des $x \geq 0$;
 - Γ_2 : le segment de droite allant de B à O ;
 - Γ_3 : le segment de droite allant de O à A .
 Les points A et B sont à déterminer.



- (a) En utilisant un paramétrage adapté à chaque cas, calculer :
 - (i) $\int_{\Gamma_3} \mathbf{f}$.
 - (ii) $\int_{\Gamma_2} \mathbf{f}$.
 - (iii) $\int_{\Gamma_1} \mathbf{f}$. Calculer $\int_{\Gamma_1} \mathbf{f}$ de deux manières différentes (Ind. utiliser la question (1)).
- (b) Déterminer un potentiel h de \mathbf{f} .
- (c) Retrouver $\int_{\Gamma_i} \mathbf{f}$ pour $i = 1, 2, 3$.