Test du 4 Novembre 2021
Documents et calculatrice non autorisés – durée 1h

Exercice 1. *Soit les champs scalaires* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *définis par,*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x) &= \|x\|^2, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{g}(x) &= \frac{1}{\|x\|^4}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}. \end{aligned}$$

(a) *Montrer que* $\mathbf{f}$ *et* $\mathbf{g}$ *sont différentiables dans leurs domaines respectifs.*
(b) *Calculer la différentielle* $\mathbf{f}$.
(c) *Calculer la différentielle* $\mathbf{g}$.

Corrigé l'exercice 1. (a) *Si* $x = (x_1, \cdots, x_n)$ *alors* $\mathbf{f}(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ *est une fonction polynomiale en* $x_1, \cdots, x_n$. *Par conséquent* $\mathbf{f}$ *est différentiable (elle est même de classe* C^∞*).*

Soit la fonction $\varphi \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, *définie par* $\varphi(t) = \frac{1}{t^2}$. *On a* $\mathbf{g} = \varphi \circ \mathbf{f}$. *La fonction* φ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et donc différentiable et comme* $\mathbf{f}$ *est différentiable sur* $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{g}$ *est différentiable sur* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) Soient $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $h \in \mathbb{R}^n$. *On a*

$$\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x) = \|x+h\|^2 - \|x\|^2 = 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2 = \ell(h) + o(\|h\|)$$

où $\ell \colon h \mapsto \ell(h) = 2\langle x, h\rangle$ *est linéaire et* $o(\|h\|) = \|h\|$. *Il s'esnuit que* $D\mathbf{f}(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$.

(c) La fonction φ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et donc différentiable, de différentielle* $D\varphi(t)(s) = \varphi'(t)s = -\frac{2}{t^3}s$.

Comme $\mathbf{g} = \varphi \circ \mathbf{f}$, *on a* $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$D\mathbf{g}(x) = D(\varphi \circ \mathbf{f})(x) = D\varphi(\mathbf{f}(x)) \circ D\mathbf{f}(x)$$

et $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} D\mathbf{g}(x)(h) &= D\varphi(\mathbf{f}(x))(D\mathbf{f}(x)(h)) \\ &= D\varphi(\|x\|^2)(2\langle x, h\rangle) \\ &= -\frac{2}{\|x\|^6} \times 2\langle x, h\rangle) \\ &= -4\frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|^6}. \end{aligned}$$

Exercice 2. *Soit le champs de vecteurs* $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *défini par*

$$(x, y) \mapsto \mathbf{f}(x, y) = (xy^2, x^2y)$$

On pose $P(x, y) = xy^2$ *et* $Q(x, y) = x^2y$.

(1) (a) *Calculer* $\mathrm{rot}(\mathbf{f})$.

(b) *Montrer que l'intégrale curviligne* $\int_\Gamma \mathbf{f}$ *est nulle lorsque* Γ *est un courbe simple fermée.*

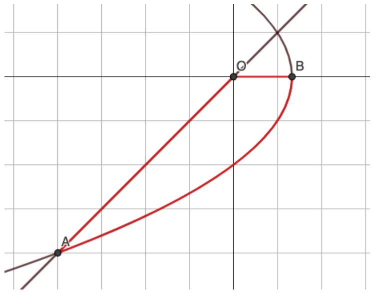
(2) *Soit la courbe* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ *où*

Γ_1 *: l'arc de la parabole d'équation* $y^2 = 4 - 3x$ *limitée en* A *par la droite d'équation* $y = x$ *et en* B *par l'axe des* $x \geq 0$ *;*

Γ_2 *: le segment de droite allant de* B *à* O *;*

Γ_3 *: le segment de droite allant de* O *à* A.

Les points A *et* B *sont à determiner.*



(a) *En utilisant un paramétrage adapté à chaque cas, calculer :*
(i) $\int_{\Gamma_3} \mathbf{f}$.
(ii) $\int_{\Gamma_2} \mathbf{f}$.
(iii) $\int_{\Gamma_1} \mathbf{f}$. *Calculer* $\int_{\Gamma_1} \mathbf{f}$ *de deux manières différentes (Ind. utiliser la question (1)).*

(b) *Determiner un potentiel* h *de* $\mathbf{f}$.

(c) *Retrouver* $\int_{\Gamma_i} \mathbf{f}$ *pour* $i = 1, 2, 3$.

Corrigé l'exercice 2. *Les abscisses des points d'intersections entre la parabole* $y^2 = 4 - 3x$ *et la droite* $y = x$ *sont les solutions de* $x^2 + 3x - 4 = 0$ *après calcul on trouve* $x = 1$ *et* $x = -4$, *par suite* $y = 1$ *et* $y = -4$ *respectivement. Ainsi* $A = (-4, -4)$. *L'abscisse du point* B *est solution de* $0 = 4 - 3x$, *d'où* $x = \frac{4}{3}$, *ainsi* $B = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$.

(1) (a) *On a*

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathbf{f})(x,y) &= \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\\ &= \frac{\partial\left(x^2y\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial y}\\ &= 2yx-2yx\\ &= 0\end{aligned}$$

(b) *Soit $\omega = P(x,y)dx+Q(x,y)dy = xy^2dx+x^2ydy$ la forme différentielle associée au champ $\mathbf{f}$. Donc $\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \mathbf{f}$. D'après (a), la forme différentielle ω est fermée, comme elle est définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est un domaine étoilé d'après le théorème de Poincaré, elle est exacte, en particulier son intégrale curviligne est nulle le long de tout courbe simple fermée.*

(2) (a)

(i) *Γ_3 a pour paramétrage : $\gamma_3(t)=(-t,-t)$ avec $t=0\to t=4$. Donc*

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3}\mathbf{f} &= \int_0^4 \mathbf{f}(\gamma_3(t))\cdot\gamma_3'(t)dt\\ &= \int_0^4 \left((-t)\left((-t)^2\right)(-1)+(-t)(-t)^2(-1)\right)dt\\ &= 2\int_0^4 t^3dt = 128.\end{aligned}$$

(ii) *Γ_2 a pour paramétrage : $\gamma_2(t)=\left(\frac{4}{3}-t,0\right)$ avec $t=0\to t=\frac{4}{3}$. Donc*

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2}\mathbf{f} &= \int_0^{\frac{4}{3}} \mathbf{f}(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)dt\\ &= \int_0^{\frac{4}{3}}\left(\left(\frac{4}{3}-t\right)\times 0^2,\left(\frac{4}{3}-t\right)^2\times 0\right)\cdot(-1,0)dt\\ &= \int_0^{\frac{4}{3}} 0dt = 0.\end{aligned}$$

(iii) *Γ_1 a pour paramétrage : $\gamma_1(t)=\left(\frac{4-t^2}{3},t\right)$ avec $t=-4\to t=0$. Donc*

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1}\mathbf{f} &= \int_{-4}^0 \mathbf{f}(\gamma_1(t))\cdot\gamma_21(t)dt\\ &= \int_{-4}^0\left(\left(\frac{4-t^2}{3}\right)t^2(-1)+t\left(\frac{4-t^2}{3}\right)^2(1)\right)dt\\ &= \int_{-4}^0\left(-\left(\frac{4-t^2}{3}\right)t^2+t\left(\frac{4-t^2}{3}\right)^2\right)dt\\ &= \int_{-4}^0 \frac{16}{9}t-\frac{4}{3}t^2-\frac{8}{9}t^3+\frac{1}{3}t^4+\frac{1}{9}t^5dt\\ &= -128\end{aligned}$$

Deuxième méthode : d'après (1), comme $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ est fermée,

$$\int_{\Gamma_1}\mathbf{f}+\int_{\Gamma_2}\mathbf{f}+\int_{\Gamma_3}\mathbf{f}=\int_\Gamma\mathbf{f}=0$$

Donc

$$\int_{\Gamma_1}\mathbf{f}=-\int_{\Gamma_2}\mathbf{f}-\int_{\Gamma_3}\mathbf{f}=-128.$$

(b) *On sait d'après (1) que $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel. Soit $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tel que $\mathbf{f}=\nabla h$. Donc*

$$\begin{cases}\frac{\partial h}{\partial x}=xy^2 \Longrightarrow h=\frac{x^2y^2}{2}+g(y) \text{ et}\\ \frac{\partial h}{\partial y}=x^2y \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y}=0 \Longrightarrow g \text{ est constante}\end{cases}$$

On peut donc choisir $g=0$ d'où $h(x,y)=\frac{x^2y^2}{2}$ est une primitive de $\mathbf{f}$.

(c) *En utilisant h on obtient*

$\int_{\Gamma_3}\mathbf{f}=h(A)-h(O)=128-0=128.$

$\int_{\Gamma_2}\mathbf{f}=h(O)-h(B)=0-0=0.$

$\int_{\Gamma_1}\mathbf{f}=h(B)-h(A)=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2\times 0^2}{2}-\frac{(-4)^2\times(-4)^2}{2}=-\frac{4^4}{2}=-128.$