

**Examen du 16 Mars 2021***Calculatrices et documents non autorisés. Durée 1h30.***Exercice 1.** Soit le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, xyz)$$

défini sur  $\mathbb{R}^3$ .Considérons la boule unité  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  paramétrée par

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi$$

avec  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$  et  $r \in [0, 1]$ .Soit  $\Sigma = \partial B$  la sphère unité (bord de  $B$ ) et  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à  $\Sigma$  sortant.

- (1) Calculer  $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ .
- (2) Déterminer le vecteur normal  $\mathbf{n}$ .
- (3) Calculer  $\iiint_B \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz$ .
- (4) Calculer  $\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ .
- (5) Commenter ces deux résultats.

**Exercice 2.** Le but de cet exercice est de chercher des fonctions intégrables  $u$  telles que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} u(s) e^{-|x-s|} ds \quad (\text{Eq1})$$

où  $\beta \in ]0, \frac{1}{2}[$ . On pose  $f(x) = e^{-|x|}$ .

- (1) Montrer que la transformée de Fourier de  $f$  est donnée par  $\widehat{f}(\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$ .
- (2) Ecrire l'équation (Eq1) sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.
- (3) Transformer l'équation obtenue en (2) à l'aide de la transformée de Fourier.
- (4) En déduire la transformée de Fourier  $\widehat{u}(\nu)$  de  $u$  en fonction de  $\nu$ .
- (5) En utilisant l'injectivité de la transformée de Fourier, déterminer alors une solution  $u$  de (Eq1).

**t.s.v.p.**

## Formulaire

La transformée de Fourier de  $f$  est notée  $\mathcal{F}[f]$  ou  $\hat{f}$ . La transformée de Fourier inverse de  $g$  est notée  $\mathcal{F}^{-1}[g]$  ou  $\bar{\mathcal{F}}[g]$ .

Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$  alors

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t)](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi t\nu} dt}, \quad \boxed{\mathcal{F}^{-1}[g(\nu)](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu)e^{+2i\pi t\nu} d\nu}.$$

Si  $f$  et  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ , alors (on peut retrouver  $f$  en tout point de continuité)

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f])(t) = f(t)}$$

Les formules suivantes sont à utiliser avec les précautions nécessaires :

$$\boxed{\mathcal{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)](\nu) = \alpha \mathcal{F}[f(t)](\nu) + \beta \mathcal{F}[g(t)](\nu)}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t-a)](\nu) = e^{-2i\pi\nu a} \mathcal{F}[f(t)](\nu)}, \quad \boxed{\mathcal{F}[f(t)](\nu - \nu_0) = \mathcal{F}[e^{2i\pi\nu_0 t} f(t)](\nu)}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[f(at)](\nu) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\nu}{a}\right)}, \quad \boxed{\mathcal{F}[f(t)](a\nu) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right](\nu)}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[f^{(k)}(t)](\nu) = (2i\pi\nu)^k \mathcal{F}[f(t)](\nu)}, \quad \boxed{\frac{d^k}{d\nu^k} \mathcal{F}[f(t)](\nu) = (-2i\pi)^k \mathcal{F}[t^k f(t)](\nu)}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[f \star g] = \mathcal{F}[f] \times \mathcal{F}[g]}, \quad \boxed{\mathcal{F}[f \times g] = \mathcal{F}[f] \star \mathcal{F}[g]}$$

$$\boxed{\|\mathcal{F}[f]\|_2 = \|f\|_2}, \quad (\text{Forme de Parseval-Placherel})$$

**Exercice 1-Corrigé.** (1) On a

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) = xy$$

(2) Le paramétrage de  $B$

$$\gamma : (r, \theta, \varphi) \rightarrow (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$$

( $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$  et  $r \in [0, 1]$ ) correspond aux coordonnées sphériques avec la colatitude. Dans ce cas, le jacobien est  $-r^2 \sin(\varphi)$ . Donc

$$\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -r^4 \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi)^3 dr d\theta d\varphi = \boxed{0}.$$

(3) La surface  $\Sigma$  est paramétrée par

$$\sigma : (\theta, \varphi) \rightarrow (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

$\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$ . Le vecteur normal est

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = -(\cos \theta \sin^2 \varphi, \sin \theta \sin^2 \varphi, \sin \varphi \cos \varphi)$$

On trouve donc

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -(0, 0, \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi \cos \varphi) \cdot (\cos \theta \sin^2 \varphi, \sin \theta \sin^2 \varphi, \sin \varphi \cos \varphi) d\theta d\varphi \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi d\theta d\varphi \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

(5) C'est cohérent avec le théorème de la divergence :

$$\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

**Exercice 2-Corrigé.** (1) On a

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-2i\pi\nu x} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x| - 2i\pi\nu x} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(1-2i\pi\nu)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(1+2i\pi\nu)x} dx \\ &= \left[ \frac{1}{1-2i\pi\nu} e^{(1-2i\pi\nu)x} \right]_{x \rightarrow -\infty}^0 + \left[ \frac{-1}{1+2i\pi\nu} e^{-(1+2i\pi\nu)x} \right]_0^{x \rightarrow +\infty} \\ &= \frac{1}{1-2i\pi\nu} + \frac{1}{1+2i\pi\nu} \\ &= \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2} \end{aligned}$$

(2) On trouve

$$u(x) = f(x) + \beta \int_{\mathbb{R}} u(s)f(x-s)ds = f(x) + \beta(u \star f)(x)$$

(3) La transformée de Fourier de cette équation donne

$$\widehat{u}(\nu) = \widehat{f}(\nu) + \beta\widehat{u}(\nu)\widehat{f}(\nu)$$

(4) On a

$$\left[1 - \beta\widehat{f}(\nu)\right]\widehat{u}(\nu) = \widehat{f}(\nu)$$

ou encore

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\nu) &= \frac{\widehat{f}(\nu)}{1 - \beta\widehat{f}(\nu)} \\ &= \frac{\frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}}{1 - \beta\frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}} \\ &= \frac{2}{1 - 2\beta + 4\pi^2\nu^2} \\ &= \frac{1}{1 - 2\beta} \times \frac{1}{1 + 4\pi^2 \left(\frac{\nu}{\sqrt{1-2\beta}}\right)^2}\end{aligned}$$

(5) On a

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\nu) &= \frac{1}{1 - 2\beta} \times \mathcal{F}[f] \left( \frac{\nu}{\sqrt{1 - 2\beta}} \right) \\ &= \frac{1}{1 - 2\beta} \times \sqrt{1 - 2\beta} \mathcal{F}[f(\sqrt{1 - 2\beta} x)](\nu) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\beta}} \mathcal{F}[f(\sqrt{1 - 2\beta} x)](\nu)\end{aligned}$$

et par injectivité de la transformée de Fourier, on trouve

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\beta}} e^{-\sqrt{1-2\beta}|x|}$$