Test du 22 Janvier 2018

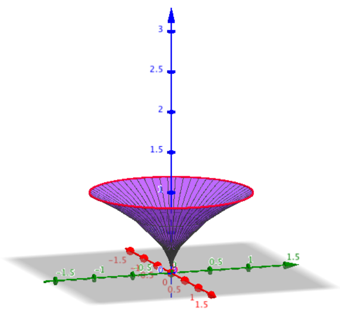
Calculatrices et documents non autorisés. Durée 1h30mn.

Exercice 1.

Soit la surface

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = z^4, \ \ 0 \leq z \leq 1\},$$

et soit $\Gamma = \partial\Sigma$ son bord.



On donne les paramétrisations de Σ et Γ :

$$\begin{aligned} \Sigma \quad &= \{\sigma(r,\theta) = (r^2\cos\theta, r^2\sin\theta, r) \ ; \ 0 \leq r \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \\ \Gamma \quad &= \{\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1) \ ; \ \theta : 0 \to 2\pi\}. \end{aligned}$$

Considérons le champ vectoriel $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2y, z, x)$$

(1) Calculer $\mathbf{rot}(\mathbf{f})$.
(2) Calculer $\iint_\Sigma \mathbf{rot}(\mathbf{f}) \cdot dS$.
(3) Calculer l'integrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\ell$.
(4) Le théorème de Stokes est-il vérifié pour $(\mathbf{f}, \Sigma)$?

Corrigé. (1) On a $\mathbf{rot}(\mathbf{f})(x,y,z) = (-1,-1,-x^2)$.
(2) On a

$$\frac{\partial}{\partial r}\sigma(r,\theta) \wedge \frac{\partial}{\partial\theta}\sigma(r,\theta) = (2r\cos\theta, 2r\sin\theta, 1) \wedge (-r^2\cos\theta, r^2\cos\theta, 0) = (-r^2\cos\theta, -r^2\sin\theta, 2r^3)$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \mathbf{rot}(\mathbf{f}) \cdot dS \quad &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-1,-1,-r^4\cos^2\theta) \cdot (-r^2\cos\theta, -r^2\sin\theta, 2r^3)) d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r^2(\cos\theta + \sin\theta) - 2r^7\cos^2\theta\right) d\theta dr \\ &= -2\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^7 \cos^2\theta d\theta dr = \boxed{-\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

(3) On a

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\gamma(\theta))\cdot\gamma'(\theta)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}(\cos^2\theta\sin\theta, 1, \cos\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0)d\theta\\ &= -\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta = \boxed{-\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

(4) Comme $\iint_\Sigma \mathbf{rot}(\mathbf{f})\cdot dS = \int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\ell$ *le théorème de Stokes est vérifé.*

Exercice 2.

On considère le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = 3y(t) + 2z(t)\\ y'(t) = -2x(t) + 5y(t) + 2z(t)\\ z'(t) = 2x(t) - 3y(t)\end{cases}$$

On notera A la matrice associée.

(1) Déterminer les valeurs propres de A.
(2) Déterminer les sous-espaces propres de A.
(3) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
(4) Déterminer la solution générale du système différentiel.

Corrigé : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2\\ -2 & 5 & 2\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}$$

Le système est equivalent $X'(t) = AX(t)$ *avec*

(1) $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$*, donc* $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

(2) $E_1(A) = \mathrm{vect}\{v_1\}$ *où* $v_1 = (1, 1, -1)$ *et* $E_2(A) = \mathrm{vect}\{v_2, v_3\}$ *où* $v_2 = (3, 2, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ *(on peut aussi prendre* $E_2(A) = \mathrm{vect}\{v_2', v_3\}$ *avec* $v_2' = (0, 2, -3)$*).*

(3) Comme $\dim E_1(A) + \dim E_2(A) = 3 = \dim \mathbb{R}^2$*, la matrice A est diagonalisable.*

(4) La solution générale du système différentiel est donc

$$X(t) = \alpha e^t v_1 + \beta e^{2t} v_2 + \gamma e^{2t} v_3$$

c-à-d.

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^t + 3\beta e^{2t} + \gamma e^{2t}\\ \alpha e^t + 2\beta e^{2t}\\ -\alpha e^t + \gamma e^{2t}\end{pmatrix}$$

Exercice 3.

Résoudre, en utilisant la transformée de Laplace, l'équation différentielle

$$y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = t^2 e^t$$

avec les conditions

$$y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2.$$

Corrigé : Soit $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, alors l'équation différentielle se transforme sous la forme

$$\left(s^3Y - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)\right) - 3\left(s^2Y - sy(0) - y'(0)\right) + 3\left(sY - y(0)\right) - Y = \frac{2}{(s-1)^3}$$

d'ou en tenant compte des condition $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2$,

$$\begin{aligned} (s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y - s^2 + 3s - 1 &= \tfrac{2}{(s-1)^3} \\ (s-1)^3Y - s^2 + 3s - 1 &= \tfrac{2}{(s-1)^3} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} Y &= \tfrac{s^2-3s+1}{(s-1)^3} + \tfrac{2}{(s-1)^6} \\ &= \tfrac{1}{s-1} - \tfrac{1}{(s-1)^2} - \tfrac{1}{(s-1)^3} + \tfrac{2}{(s-1)^6} \end{aligned}$$

Par inversion de la transformée de Laplace, on trouve

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s-1} - \tfrac{1}{(s-1)^2} - \tfrac{1}{(s-1)^3} + \tfrac{2}{(s-1)^6}\right](t) \\ &= e^t - te^t - \tfrac{t^2e^t}{2!} + \tfrac{2t^5e^t}{5!} = \boxed{e^t - te^t - \frac{t^2e^t}{2} + \frac{t^5e^t}{60}} \end{aligned}$$
