Examen du 23 Janvier2019

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 2h.

Execice 1. On considère le champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$f(x, y, z) = (0, x^2, 0)$$

et soit Σ la surface délimitée par le triangle de sommets $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (1, 1, 0)$ et Γ son bord.

(a) Calculer $\iint_\Sigma \mathrm{rot}(f) \cdot dS$ (où dS est le vecteur normal à Σ).

(b) Calculer $\int_\Gamma f \cdot d\ell$.

(c) Le théorème de Stokes est-il vérifié pour (f, Σ)?

Corrigé. (a). On a $\mathrm{rot}(f)(x, y, z) = (0, 0, 2x)$. La surface Σ est un triangle dans le plan xy paramétré par

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\sigma(x, y) = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in \bar{A}\} \\ A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [1, 2],\ 2x - 2 < y < x\} \end{aligned}$$

On a aussi $\sigma_x \wedge \sigma_y = (0, 0, 1)$, donc

$$\iint_\Sigma \mathrm{rot}(f) \cdot dS = \int_1^2 \int_{2x-2}^{x} (0, 0, 2x) \cdot (0, 0, 1) dy dx = \int_1^2 \int_{2x-2}^{x} 2x dy dx = \frac{4}{3}.$$

(b) Le bord $\Gamma = \partial\Sigma$ de Σ est paramétré par $\Gamma = \sigma(A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ avec

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{\sigma(x, 2x - 2) = (x, 2x - 2, 0),\ x : 1 \to 2\} \\ \Gamma_2 &= \{\sigma(x, x) = (x, x, 0),\ x : 2 \to 1\} \\ \Gamma_3 &= \{\sigma(1, y) = (1, y, 0),\ y : 1 \to 0\} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} f \cdot d\ell &= \int_1^2 (0, x^2, 0) \cdot (1, 2, 0) dx = \frac{14}{3} \\ \int_{\Gamma_2} f \cdot d\ell &= -\int_1^2 (0, x^2, 0) \cdot (1, 1, 0) dx = -\frac{7}{3} \\ \int_{\Gamma_3} f \cdot d\ell &= -\int_0^1 (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0) dx = -1 \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f \cdot d\ell &= \int_{\Gamma_1} f \cdot d\ell + \int_{\Gamma_2} f \cdot d\ell + \int_{\Gamma_3} f \cdot d\ell \\ &= \frac{14}{3} - \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(c) Comme $\iint_\Sigma \mathrm{rot}(f)\cdot dS = \int_\Gamma f\cdot d\ell$, le théorème de Stokes est donc vérifé pour (f,Σ).

Execice 2. (1) (a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : x \mapsto e^{-|x|}$.

(b) En utilisant la formule d'inversion, calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

(c) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

(2) Le de cette question est de rechercher des fonctions φ intégrables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = e^{-|x|} + \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|}\varphi(s)d$$

(a) Ecrire cette équation sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.

(b) En déduire la transformée de Fourier de φ.

(c) En utilisant la formule d'inversion, déduire l'équation admet une unique solution et la déterminer.

Corrigé. (1) (a) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[e^{-|x|}](s) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}e^{-2i\pi x\nu}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-2i\pi x\nu}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-2i\pi x\nu}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-2i\pi\nu)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(x+2i\pi\nu)}dx \\
&= \frac{1}{1-2i\pi\nu} + \frac{1}{1+2i\pi\nu} = \boxed{\frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}}
\end{aligned}$$

(b) Comme la fonction $x \mapsto \frac{2}{1+4\pi^2x^2}$ est paire, par la formule de l'inversion $\mathcal{F}\left[\frac{2}{1+4\pi^2x^2}\right](\nu) = e^{-|\nu|}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](\nu) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\frac{2}{1+4\pi^2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}\right](\nu) \\
&= \frac{1}{2}2\pi\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](2\pi\nu) \\
&= \boxed{\pi e^{-2\pi|\nu|}}
\end{aligned}$$

(c) Si on pose $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alors $\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}f'(x)$ et

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{x}{(1+x^2)^2}\right](\nu) &= -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[f'(x)\right](\nu) \\
&= -\frac{1}{2}(2i\pi\nu)\mathcal{F}\left[f(x)\right](\nu) \\
&= -i\pi\nu \times \pi e^{-2\pi|\nu|} \\
&= \boxed{-i\pi^2\nu e^{-2\pi|\nu|}}
\end{aligned}$$

(2) (a) L'equation en question est équivalente à

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{3}{8} f \star \varphi(x)$$

(b) En appliquant la transformée de Fourier à cette équation, on a

$$\widehat{\varphi}(\nu) \;=\; \widehat{f}(\nu) + \frac{3}{8}\widehat{\varphi}(\nu)\widehat{f}(\nu)$$

d'où

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(\nu) &= \frac{\widehat{f}(\nu)}{1-\frac{3}{8}\widehat{f}(\nu)} \\ &= \frac{8}{1+16\pi^2\nu^2} \quad \text{car } \widehat{f}(\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}\end{aligned}$$

(c) Par la formule de l'inversion, on

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 8\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+16\pi^2\nu^2}\right](x) \\ &= 4\mathcal{F}\left[\frac{2}{1+4\pi^2(2\nu)^2}\right](x) \\ &= 4 \times \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}\right]\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \boxed{2e^{-|\nu|/2}}\end{aligned}$$

Execice 3. Soit $u(x,t)$ une fonction définie pour $0 < x < 1$ et $t > 0$. On souhaite résoudre l'EDP suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u \\ u(x,0) = \sin(2\pi x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

On note $Y(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}(s)$ la transformée de Laplace de u par rapport à la variable t.

(a) En appliquant $\mathcal{L}$, transformer l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle du second ordre.

(b) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle trouvée en (a).

(c) En prenant la transformée de Laplace des conditions aux limites, trouver $Y(x,s)$.

(d) En appliquant la transformée de Laplace inverse, trouver u.

Corrigé. On pose $Y(x,s) = \mathcal{L}[u(tx,t)](s)$ la transformée de Laplace de u par rapport à t. Donc

$$sY - u(x,0) = \frac{d^2Y}{dx^2}$$

ou encore
$$\frac{d^2Y}{dx^2} - sY = -\sin(2\pi x)$$
Cette équation a pour solution générale
$$Y(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s+4\pi^2}\sin(2\pi x)$$
On prend ensuite la transformée de Laplace des condition initiales (par rapport à t)
$$\mathcal{L}[u(0,t)](s) = Y(0,s) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[u(1,t)](s) = Y(1,s) = 0$$
et en portant ceci dans la solution on trouve $c_1 + c_2 = 0$ et $c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0$, ce qui donne $c_1 = c_2 = 0$ et on obtient
$$Y(x,s) = \frac{1}{s+4\pi^2}\sin(2\pi x)$$
d'où après inversion
$$u(x,t) = \boxed{e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)}$$