Chapitre 3
Systèmes différentiels

Math pour Ingénieurs – S5/1A NRJ ; ISN

Octobre 2023

Introduction

Vous savez résoudre les équations différentielles du type $x'(t) = ax(t)$, où la dérivée $x'(t)$ est liée à la fonction $x(t)$.
Par exemple, si a est une constante, les fonctions solutions sont les $x(t) = x_0 e^{at}$ (où $x_0 \in \mathbb{R}$).
Plus généralement, on apprend à résoudre les équations $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ où a et b sont des fonctions de t.
Dans tous les cas, l'exponentielle joue un rôle central dans l'écriture des solutions.
Considérons maintenant le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases} \tag{1}$$

La situation se complique car les équations sont enchevêtrées :
$x'(t)$ est liée à $x(t)$, mais aussi à $y(t)$.
Donc il faudrait d'abord trouver $y(t)$ pour résoudre la première équation.
Mais, dans la seconde équation, $y'(t)$ est liée à $y(t)$, mais aussi à $x(t)$, que l'on n'a pas encore su trouver !
Pour s'en sortir, la solution consiste à considérer le couple $(x(t), y(t))$ comme une seule variable. On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel (1) s'écrit alors simplement :

$$X'(t) = AX(t).$$

On a alors envie de dire que, comme pour une équation du type $x'(t) = ax(t)$, les solutions de ce type d'équation seraient les fonctions définies par

$$X(t) = e^{tA} \cdot X_0$$

(où $X_0 \in \mathbb{R}^2$) et ce sera effectivement le cas, une fois que l'on aura défini ce qu'est l'exponentielle d'une matrice !

Systèmes différentiels homogènes

Un **système différentiel linéaire homogène** à coefficients constants est un système d'équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

où les $a_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ sont des coefficients constants réels ou complexes. On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Avec cette notation matricielle, le système différentiel (S) devient :

$$X'(t) = AX(t)$$

remarque

(a) Résoudre le système linéaire $X' = AX$, avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $A \in M_n(\mathbb{C})$) une matrice constante, c'est donc trouver $X(t)$ dérivable (c'est-à-dire n fonctions $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ dérivables) tel que $X'(t) = AX(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(b) Dans le cas $n = 1$, on retrouve simplement une seule équation que l'on écrit $x'(t) = ax(t)$ et dont les solutions sont les $x(t) = x_0 e^{at}$, pour n'importe quelle constante (réelle ou complexe) x_0.
(c) L'ensemble des solutions est un espace vectoriel. En effet, on prouve facilement que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$: la fonction identiquement nulle est solution et, si X_1 et X_2 sont solutions, alors $\lambda X_1 + \mu X_2$ est aussi solution (avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

Système diagonal

Si A est une matrice diagonale à coefficients réels, alors le système s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ \quad \vdots \\ x_n'(t) = \lambda_n x_n(t) \end{cases}$$

On résout indépendamment chaque équation $x_i'(t) = \lambda_i x_i(t)$, dont les solutions sont les $x_i(t) = k_i e^{\lambda_i t}, k_i \in \mathbb{R}$. Les solutions $X(t)$ sont donc les fonctions

$$X(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

où $k_1, \ldots, k_n$ sont des constantes réelles.

Système triangulaire

Un système triangulaire n'est pas tellement plus compliqué à résoudre. En effet, si A est une matrice triangulaire, on a :

$$\begin{cases} x_1' & = & a_{11}x_1 + \cdots + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' & = & \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots & & \\ x_n' & = & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n \end{cases}$$

On résout le système de proche en proche : on peut d'abord intégrer la dernière équation, puis reporter la solution dans l'équation précédente (qui devient une équation du type $x'(t) = ax(t) + b(t)$) et ainsi en remontant intégrer tout le système.

Système différentiels linéaires homogènes : Cas diagonalisable

Voici un premier résultat qui affirme que si on connaît un vecteur propre de A, alors on peut lui associer une solution du système différentiel.

Proposition

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, λ une valeur propre de A et v un vecteur propre associé. Alors la fonction

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto e^{\lambda t} v \end{aligned}$$

est solution du système différentiel $X' = AX$.

exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(X) = (X-2)^2$, la seule valeur propre de A est donc $\lambda = 2$.

Déterminons un vecteur propre : soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que $A \cdot V = 2V$; on a alors $x + y = 0$, et le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.

Ainsi l'application $X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$ est une solution du système $X' = AX$, ce que l'on vérifie aussi à la main.

Théorème

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice diagonalisable sur* $\mathbb{R}$*. Notons* $(v_1, \ldots, v_n)$ *une base de vecteurs propres et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *les valeurs propres correspondantes. Alors les fonctions*

$$X_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

forment une base de l'espace des solutions du système $X' = AX$*.*

exemple

On veut résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec $X(0) = X_0$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Valeurs propres et vecteurs propres. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 5$. Les vecteurs propres associés sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Solutions générales. Nous obtenons trois solutions

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{\lambda_2 t} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix},$$

$$X_3(t) = e^{\lambda_3 t} V_3 = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système $X' = AX$ sont donc les fonctions de la forme

$$X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) + \gamma X_3(t)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- Condition initiale :

On cherche quelle solution vérifie en plus $X(0) = X_0$. Or

$$X(0) = \alpha X_1(0) + \beta X_2(0) + \gamma X_3(0) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

on a donc en le système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}$$

On trouve $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1$. Ainsi l'unique solution qui vérifie le système et la condition initiale est

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Exponentielle de matrices

Avant de définir l'exponentielle de matrices, voici quelques petits rappels sur l'exponentielle réelle ou complexe. Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$, l'exponentielle peut être définie par une série :

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

On la note aussi e^z. Retenons quelques propriétés principales :

1. $\exp(0) = 1$,
2. $\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z') \, (\forall z, z' \in \mathbb{C})$,
3. $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} (\forall z \in \mathbb{C})$,
4. $\exp(kz) = (\exp(z))^k (\forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{Z})$.

Une autre propriété essentielle est que l'exponentielle définit une fonction dérivable et (pour $a \in \mathbb{C}$) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(at) = a \exp(at).$$

L'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ étant un espace vectoriel de dimension finie sur lequel toutes les normes sont équivalentes, on en choisit une que l'on note $\|\cdot\|$.
Par exemple, $\|A\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}(|a_{ij}|)$.
La série de terme général $\frac{1}{k!}a^k$ étant convergente pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{1}{k!}\|A\|^k$ est également convergente pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Par conséquent, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$ est convergente dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*, la série* $\sum_{k \geqslant 0} \frac{A^k}{k!}$ *converge dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. On note*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

sa limite. C'est la **matrice exponentielle** *de* A*. On la note aussi* e^A *ou* $\exp(A)$*.*

Exemple :Exponentielle d'une matrice diagonale

Si A est la matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

et donc

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple : Exponentielle d'une matrice nilpotente

Soit A une matrice nilpotente d'indice de nilpotence $N \in \mathbb{N}$. Alors $\exp(A)$ est une somme finie

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!}.$$

L'exponentielle de matrices (réelles ou complexes) vérifie les propriétés suivantes :

Proposition (Propriétés de l'exponentielle d'une matrice)

On a

1. Si on note O_n la matrice nulle, alors $\exp\left(O_n\right) = I_n$.

2. Si A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

3. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $\exp(A)$ est inversible et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$

4. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(kA) = (\exp(A))^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

5 *Si $A, P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et P est inversible, on a* $\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}\exp(A)P$.

exemple

On vérifie facilement que

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

pour tout t réel :
On a $\chi_A(X) = X^2 + 1$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} = \{\pm i\}$ et $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

Donc

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Méthode de calcul de $\exp(A)$.

– Si A est diagonale ou nilpotente, il n'y a pas de problème.
– Sinon, on trigonalise la matrice A : $A = PTP^{-1}$. On a alors $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$. Tout revient donc à calculer $\exp(T)$.

Méthode de trigonalisation

– On peut utiliser la décomposition de Dunford $A = \Delta + N$ avec Δ diagonalisable, N nilpotente et $N\Delta = \Delta N$, ce qui permet d'écrire $\exp(A) = \exp(\Delta) \cdot \exp(N)$. La matrice Δ étant diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}\Delta P$ soit diagonale, soit encore $\triangle = PDP^{-1}$, d'où

$$\exp(\Delta) = \exp\left(PDP^{-1}\right) = P\exp(D)P^{-1}.$$

On peut donc toujours calculer l'exponentielle d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

– On peut aussi utiliser la réduite de Jordan ...

Exemple

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Décomposition de Dunford. La décomposition de Dunford est $A = D + N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ici D est déjà une matrice diagonale puisque $D = 2I_3$, ce qui va simplifier les calculs.

- La matrice diagonale.

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = e^2 I$$

- La matrice nilpotente.

La matrice N est nilpotente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0$$

Ainsi

$$\exp(N) = I + N + \frac{1}{2!}N^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Exponentielle de A.

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 & -\frac{1}{2}e^2 \\ \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 & -\frac{3}{2}e^2 \\ -e^2 & e^2 & 2e^2 \end{pmatrix}$$

Si $A(t)$ est une matrice dont les coefficients $a_{ij}(t)$ sont des fonctions dérivables de la variable t, alors la dérivée de $A(t)$ est la matrice $A'(t)$ dont les coefficients sont les dérivées $a'_{ij}(t)$. La dérivée d'une matrice vérifie les propriétés usuelles des dérivées. En particulier, elle vérifie que, si les matrices $M(t)$ et $N(t)$ sont dérivables, alors le produit aussi et on a (attention à l'ordre des produits !) :

$$(MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t).$$

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Lapplication de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable et on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(tA)) = A\exp(tA)$$

Comme les matrices A et $\exp(tA)$ commutent, alors on a aussi $\frac{d}{dt}\exp(tA) = \exp(tA)A$.

Exemple

Nous avons déjà montrer que pour tout réel t

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Solutions des systèmes différentiels linéaires

Théorème

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Les solutions du système différentiel homogène* $X' = AX$ *sont les fonctions* $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *définies par*

$$X(t) = \exp(tA) \cdot X_0$$

où X_0 *est un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *quelconque.*

Solutions des systèmes différentiels linéaires

Théorème

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les solutions du système différentiel homogène $X' = AX$ sont les fonctions $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définies par

$$X(t) = \exp(tA) \cdot X_0$$

où X_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ quelconque.

Corollaire (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Pour $X_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé, il existe une et une seule solution $X(t)$ vérifiant le système différentiel $X' = AX$ et la condition initiale $X(0) = X_0$.

On va considérer maintenant un système différentiel linéaire (non-homogène)

$$X'(t) = AX(t) + b(t)$$

où

$$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad b(t) \in \mathbb{R}^n$$

et on va supposer pour simplifier l'énoncé que $t \mapsto b(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Théorème

La solution général du système différentiel $X'(t) = AX(t) + b(t)$ avec la condition initial $X(t_0) = X_0$ est donnée par

$$X(t) = e^{tA}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds$$

Résoudre le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1(t)' & = 4x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_2(t)' & = x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_3(t)' & = x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) \end{array}\right. \qquad (\Sigma)$$

(1) La matrice du système différentiel est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne son polynôme caractéristique

$$\chi_A(\lambda) = \mathbf{det}(A - \lambda \mathrm{I}_3) = (2-\lambda)(3-\lambda)^2$$

Donc 2 est une valeur propre simple et 3 est une valeur propre double.

(2) Un autre calcul simple donne les sous-espaces propres

$$\begin{aligned} E_A(2) &= \mathbf{Ker}(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}(v_1) \\ E_A(3) &= \mathbf{Ker}(A - 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3). \end{aligned}$$

où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est diagonalisable car $\dim E_A(2) + \dim E_A(3) = \dim \mathbb{R}^3$
(3) Une solution générale du système (Σ) est donnée par

$$X(t) = \alpha e^{2t} v_1 + \beta e^{3t} v_2 + \gamma e^{3t} v_3$$

pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, soit

$$X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} + \beta e^{3t} + \gamma e^{3t} \\ \alpha e^{2t} + \beta e^{3t} \\ \alpha e^{2t} + \gamma e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Exemple

18.4. Exemple : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

et le système différentiel $X' = AX$.
Calculer $\exp(At)$.
Le polynôme caractéristique de A est $P(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 6)$
On résout $(A - 6Id)x = 0$ et on trouve $v_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$.
Le sous espace spectral $\mathrm{Ker}(A - 6Id)$ est donc engendré par v_6.
Puis on résout $(A - 4Id)x = 0$, on trouve un seul vecteur $v_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$
Le sous espace spectral $\mathrm{Ker}(A - 4Id)$ est donc engendré par v_4.

Du théorème des noyaux on a $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(A-6Id) \oplus \mathrm{Ker}(A-4Id)^2$.
On va donc completer v_4 en un base de $\mathrm{Ker}(A-4Id)^2$.
On cherche alors w_4 tel que $v_4 = (A-4Id)w_4$ et on trouve
$w_4 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\{v_6, v_4, w_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base ,
(l'endomorphisme associé à) A s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

avec $P = \begin{pmatrix} v_6 & v_4 & w_4 \end{pmatrix}$.

On peut maintenant calculer l'exponentielle de tA. On a :

$$\exp\left(\left[\begin{array}{ccc} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right] t\right) = \left(\begin{array}{ccc} e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{array}\right)$$

$$\exp\left(\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] t\right) = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\exp(tT) &= \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t\right) \exp\left(\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} t\right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Au final,

$$\exp(At) = P^{-1}\begin{bmatrix} e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix} P$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{4t} - te^{4t} + \frac{1}{2}e^{6t} & te^{4t} - \frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{6t} & te^{4t} + \frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{6t} \\ -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{6t} & \frac{1}{2}e^{6t} + \frac{1}{2}e^{4t} & \frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{6t} \\ -te^{4t} & te^{4t} & te^{4t} + e^{4t} \end{bmatrix}$$

La solution générale de $X' = AX$ est donc

$$X(t) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{4t} - te^{4t} + \frac{1}{2}e^{6t} & te^{4t} - \frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{6t} & te^{4t} + \frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{6t} \\ -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{6t} & \frac{1}{2}e^{6t} + \frac{1}{2}e^{4t} & \frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{6t} \\ -te^{4t} & te^{4t} & te^{4t} + e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Équations différentielles linéaires d'ordre n

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0 \qquad (E)$$

où la fonction inconnue est une fonction $t \mapsto x(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n-fois dérivable. On introduit les fonctions auxiliaires

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x_1' = x' \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x_{n-2}' = x^{(n-2)} \\ x_n &= x_{n-1}' = x^{(n-1)} \end{aligned} \right.$$

L'équation (E) se transforme alors en le système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{r}x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1\end{array}\right.$$

Ainsi résoudre l'équation (E) est équivalent à résoudre le système différentiel

$$X'(t) = AX(t)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

Proposition (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soient $t_0 \in \mathbb{R}, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ fixés. Il existe une et une seule fonction $x(t)$ qui vérifie

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0$$

ainsi que toutes les conditions initiales :

$$x(t_0) = c_0, \quad x'(t_0) = c_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

Proposition (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soient $t_0 \in \mathbb{R}, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ fixés. Il existe une et une seule fonction $x(t)$ qui vérifie

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0$$

ainsi que toutes les conditions initiales :

$$x(t_0) = c_0, \quad x'(t_0) = c_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

Corollaire

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est un espace vectoriel de dimension n.

Exemple

On considère l'équation différentielle suivante

$$y'''(t) - y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0. \qquad \text{(E1)}$$

On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'équation (E1) est équivalente à un système différentiel homogène de la forme

$$X'(t) = AX(t) \qquad \text{(E2)}$$

où A est une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)$ donc A admet 2 valeurs propres 1, 2 et -2 et A est diagonalisable.

(3) les sous-espaces propres de A sont

$$E_A(1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ E_A(2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\ E_A(-2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$$

(4) La solution générale du système linéaire est donc de la forme

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \gamma e^{-2t}\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix},\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \\ &= \begin{pmatrix}\alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{-2t}\\ \alpha e^t + 2\beta e^{2t} - 2\gamma e^{-2t}\\ \alpha e^t + 4\beta e^{2t} + 4\gamma e^{-2t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(5) On en déduit que la solution générale de l'équation (E1) est $y(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{-2t}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Equation différentielles à coefficients variable : méthode de séries de entières

Rédoudre sur $]-1,1[$

$$(1-t^2)y''-4ty'-2y=0, \tag{2}$$

en cherchant des solutions développables en séries entières.

Pour $t\in]-1,1[$, $1-t^2\neq 0$ donc (2) est équivalente à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène définie sur $]-1,1[$.
Cherchons les fonctions développables en séries entières au voisinage de 0.

Analyse :

Supposons y une solution développable en la série entière $\sum_n a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
Sur $]-R, R[$,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, \;\; y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$

et

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n$$

ce qui donne

$$0 = (1-t^2)y'' - 4ty' - 2y = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)(a_{n+2} - a_n)t^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ (n+2)(n+1)(a_{n+2} - a_n) = 0.$$

Ainsi y est solution de (2) sur $]-R, R[$ si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ a_{n+2} = a_n$$

On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = a_0$ et $a_{2p+1} = a_1$, puis

$$y(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} t^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_0 t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_1 t^{2p+1}$$

ce qui donne

$$y(t) = a_0 \frac{1}{1-t^2} + a_1 \frac{t}{1-t^2}$$

pour tout $t \in]-R, R[$ avec nécessairement $R \leq 1$.

Synthèse :

Soit

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-t^2} \text{ et } \psi(t) = \frac{t}{1-t^2}$$

φ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et par le calcul précédent est solution de l'équation (2) sur $]-1,1[$. Il en est de même pour ψ. Les fonctions φ et ψ sont deux solutions indépendantes, elles forment donc un système fondamental de solutions de (2).

Conclusion : La solution générale de (2) est

$$\boxed{y(t) = \frac{\lambda + \mu t}{1-t^2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}.$$