Séances 3-4
Théorèmes de Stokes et de la divergence

Exercice 1. Donner la formule de changement de coordonnées dans les cas suivant :

(a) d'une transformation en coordonnées cylindriques,
(b) d'une transformation en coordonnées sphériques.

Exercice 2. Calculer le volume V du solide délimité par l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

et montrer que $V=\dfrac{4}{3}\pi abc$.

Exercice 3. En partant de la représentation paramétrique d'un hémisphère, calculer son aire.

Exercice 4. Vérifier le théorème de Stokes pour la champ vectoriel $\mathbf{f}(x,y,z)=(0,0,y^2)$ et la surface

$$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2=1,\ z\leq 0\}.$$

Exercice 5. Vérifier le théorème de la divergence pour la champ vectoriel $\mathbf{f}(x,y,z)=(xy,yz,xz)$ et le tétraèdre unité donné par

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 0<z<1-x-y,\ 0<y<1-x,\ 0<x<1\}.$$

Exercice 6. Soit le champ $\mathbf{f}(x,y,z)=(y^2,-x^2,z)$ et Γ la courbe d'intersection du plan $y+z=3$ avec le cylindre $x^2+y^2=1$.

En utilisant le théorème de Stokes, calculer $\int_\Gamma \mathbf{f}$.

Exercice 7. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par les trois surfaces d'équations

$$x^2+y^2=1,\quad z=0\ \text{ et }\ x+z=1.$$

Soit S le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur.

Notons S_1 la partie de S contenue dans la surface $x+z=1$, elle est donc paramétrée par $x(r,\theta)=r\cos\theta$, $y(r,\theta)=r\sin\theta$ et $z(r,\theta)=1-r\cos\theta$ avec $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$.

Notons aussi S_2 la partie contenue dans la surface $z=0$, elle est donc paramétrée par $x(r,\theta)=r\cos\theta$, $y(r,\theta)=r\sin\theta$ et $z(r,\theta)=0$ avec $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$.

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs donné par $\mathbf{f}(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$.

(a) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_1.
(b) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_2.
(c) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers S en utilisante la formule d'Ostrogradsky (théorème de divergence). Calculer d'abord la divergence de $\mathbf{f}$.
(d) Soit C l'intersection de des surfaces $x^2+y^2=1$ et $x+z=1$. En utilisant la formule de Stokes, calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long de la courbe C, orientée dans le sens trigonométrique, vue d'en haut.

Exercice 8. Soit le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(0,0,xyz)$$

défini sur $\mathbb{R}^3$.

Considérons la boule unité paramétrée par

$$x=r\cos\theta\sin\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\varphi$$

avec $\theta\in[0,2\pi]$, $\varphi\in[0,\pi]$ et $r\in[0,1]$.

(1) Calculer $\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})dxdydz$ où V est la boule unité.
(2) Calculer $\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$ où Σ est la sphère unité et $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à Σ sortant de la boule unité.
(3) Commenter ces deux résultats.

Exercice 9. Soit la surface

$$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2=z^4,\ \ 0\leq z\leq 1\},$$

et soit $\Gamma=\partial\Sigma$ son bord.

On donne les paramétrisations de Σ et Γ :

$$\begin{aligned}\Sigma\ &=\{\sigma(r,\theta)=(r^2\cos\theta,r^2\sin\theta,r)\ ;\ 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\},\\ \Gamma\ &=\{\gamma(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta,1)\ ;\ \theta:0\to 2\pi\}.\end{aligned}$$

Considérons le champ vectoriel $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2y, z, x)$$

(1) Calculer $\mathbf{rot}(\mathbf{f})$.
(2) Calculer $\iint_\Sigma \mathbf{rot}(\mathbf{f}) \cdot dS$.
(3) Calculer l'integrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\ell$.
(4) Le théorème de Stokes est-il vérifié pour $(\mathbf{f}, \Sigma)$?

Exercice 10. Soit Ω le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par les surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } z \geq 0$$

(1) Faire un dessin de Ω
(2) Calculer le volume de Ω.
Notons Σ le bord de Ω orienté suivant le vecteur normal extérieur.
Notons Σ_1 la partie de Σ contenue dans la surface $x^2+y^2+z^2 = 1$. On peut paramétrer Σ_1 par

$$\begin{cases} x(\varphi,\theta) &= \sin\varphi\cos\theta \\ y(\varphi,\theta) &= \sin\varphi\sin\theta \\ z(\varphi,\theta) &= \cos\varphi \end{cases} \qquad (\varphi,\theta) \in [0,\pi/2]^2.$$

Notons aussi $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$ (le complémentaire de Σ_1 dans Σ).
Soit le champ vectoriel donné par

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$$

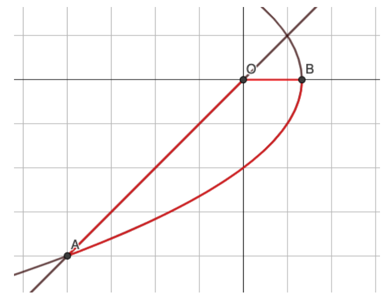
(3) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers Σ_1.
(4) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers Σ_2.
(5) Calculer l'aire de Σ_1.
(6) Calculer l'aire de Σ_2.
(7) Soit la courbe C, bord de Σ_1, orientée dans le sens trigonométrique par rapport à l'orientation de Σ_1 (dont le vecteur normal est vers l'extérieur). En utilisant la formule de Stokes, calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long de la courbe C.
On rappelle que le volume de la boule unité est $4\pi/3$ et que l'aire de la sphère unité est 4π.

Exercice 11. Soit le champs de vecteurs $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$(x,y) \mapsto \mathbf{f}(x,y) = (xy^2, x^2y)$$

On pose $P(x,y) = xy^2$ et $Q(x,y) = x^2y$.

(1) (a) Calculer $\mathrm{rot}(\mathbf{f})$.
(b) Montrer que l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{f}$ est nulle lorsque Γ est un courbe simple fermée.
(2) Soit la courbe $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où
Γ_1 : l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 4-3x$ limitée en A par la droite d'équation $y = x$ et en B par l'axe des $x \geq 0$;
Γ_2 : le segment de droite allant de B à O ;
Γ_3 : le segment de droite allant de O à A.
Les points A et B sont à determiner.



(a) En utilisant un paramétrage adapté à chaque cas, calculer :
(i) $\int_{\Gamma_3} \mathbf{f}$.
(ii) $\int_{\Gamma_2} \mathbf{f}$.
(iii) $\int_{\Gamma_1} \mathbf{f}$. Calculer $\int_{\Gamma_1} \mathbf{f}$ de deux manières différentes (Ind. utiliser la question (1)).
(b) Determiner un potentiel h de $\mathbf{f}$.
(c) Retrouver $\int_{\Gamma_i} \mathbf{f}$ pour $i = 1,2,3$.