Séances 3-4

Théorèmes de Stokes et de la divergence

Exercice 1. Donner la formule de changement de coordonnées dans les cas suivant :

(a) d'une transformation en coordonnées cylindriques,

(b) d'une transformation en coordonnées sphériques.

Corrigé l'exercice 1. On rappelle le théorème de changement de variables : Soient T, D deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\Psi : T \to D$ un difféomorphisme de classe C^1 (donc $D = \Psi(T)$) . Alors pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}^p$ continue et intégrable on a

$$\int_{\Psi(T)} f(y)dy = \int_T f(\Psi(x))|\det \mathrm{Jac}\Psi(x)|dx$$

(a) Considérons le domaine

$$D = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\}$$

et la fonction

$$\Psi : D \ni (r, \theta, z) \to (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)\mathbb{R}^3$$

Alors Ψ est un changement de coordonnées cylindriques (des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes). La matrice Jacobienne de Ψ est

$$\mathrm{Jac}\Psi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \theta & \partial x/\partial r \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \theta & \partial y/\partial r \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial \theta & \partial z/\partial r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son determinant est $\det \mathrm{Jac}\Psi(r, \theta, z) = r$.
La formule de changement de coordonnées donne

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\,rdr\,d\theta\,dz$$

où $f\colon D \to \mathbb{R}^p$ et $D = \Psi(T)$.

(b) Considérons le domaine

$$D = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi,\ -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$$

et la fonction

$$\Phi : D \ni (r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z) = (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^3$$

AlorsΨ est un changement de coordonnées sphériques (sphérique-latitude) : $r > 0$ est la distance à l'origine, $\theta \in [0, 2\pi[$ est la longitude et $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$ est la latitude.

Le déterminant de la matrice jacobienne est :

$$\begin{aligned} \det \mathrm{Jac}\Psi(r,\theta,\varphi) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos(\varphi). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la formule de changement de variables

$$\begin{gathered} \textstyle\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ = \textstyle\iiint_T f(r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi))r^2\cos(\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi \end{gathered}$$

où $f\colon D \to \mathbb{R}^p$ et $D = \Phi(T)$.

On utilise parfois un changement de coordonnées sphériques avec la *colatitude*. Dans ce cas on a

$$D = \{(r, \theta, \delta) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 < \delta < \pi\}$$

et la fonction

$$\tilde{\Phi} : D \ni (r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z) = (r\cos(\theta)\sin(\delta), r\sin(\theta)\sin(\delta), r\cos(\delta)) \in \mathbb{R}^3$$

$r > 0$ est la distance à l'origine, $\theta \in [0, 2\pi[$ est la longitude et $\delta \in]0, \pi[$ est colatitude.

Un calcul direct montre que le déterminant jacobien de $\tilde{\Phi}$ est $\det \mathrm{Jac}\tilde{\Psi}(r, \theta, \delta) = -r^2\sin\delta$. On obtient la formule de changement de variables

$$\begin{gathered} \textstyle\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ = \textstyle\iiint_T f(r\cos(\theta)\sin(\delta), r\sin(\theta)\sin(\delta), r\cos(\delta))\,r^2\sin(\delta)dr\,d\theta\,d\delta \end{gathered}$$

où $f\colon D \to \mathbb{R}^p$ et $D = \tilde{\Phi}(T)$.

Exercice 2. Calculer le volume V du solide délimité par l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

et montrer que $V=\dfrac{4}{3}\pi abc$.

Corrigé l'exercice 2. On remarque que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ est l'image de la sphère $\mathcal{S}$ unité par l'application

$$\Phi\colon (X,Y,Z)\mapsto (x,y,z)=(aX,bY,cZ)\quad \Psi(\mathcal{S})=\mathcal{E}$$

Le déterminant jacobien de Ψ est

$$\det \mathrm{Jac}\tilde{\Psi}(x,y,z)=abc$$

la formule de changement de variables donne alors

$$V=\int_{\mathcal{E}} dxdydz=\int_{\mathcal{S}}|abc|dXdYdZ=abc\int_{\mathcal{S}} dXdYdZ=abcV_0$$

où V_0 est le volume de la sphère unité. On effectue le changement de variables en coordonnées sphériques (voir exercice 1) :

$$V_0=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos(\varphi)d\varphi\, d\theta\, dr=\frac{4}{3}\pi$$

et on obtient $V=\dfrac{4}{3}\pi abc$.

Exercice 3. En partant de la représentation paramétrique d'un hémisphère, calculer son aire.

Corrigé l'exercice 3. l'hémisphère supérieur H d'une sphère centrée en l'origine et de rayon a (privée du pôle nord) est l'image de $D=[0,2\pi[\times[0,\pi/2[$ par l'application

$$\Phi\colon (\theta,\varphi)\mapsto (x,y,z)=(a\cos(\theta)\cos(\varphi),a\sin(\theta)\cos(\varphi),a\sin(\varphi)).$$

L'aire de cet hémisphère est alors

$$A=\iint_D\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right\|d\theta\, d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} a^2\cos(\varphi)\, d\varphi\, d\theta=2\pi a^2.$$

Exercice 4. Vérifier le théorème de Stokes pour la champ vectoriel $\mathbf{f}(x,y,z)=(0,0,y^2)$ et la surface

$$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2=1,\ z\le 0\}.$$

Corrigé l'exercice 4. (1) Calculons $\iint_\Sigma \mathrm{rot}(\mathbf{f})\cdot$. On a $\mathrm{rot}\mathbf{f}=(2y,0,0)$. On choisit de paramétrer Σ par

$$\sigma(\theta,\varphi)=(\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\varphi),$$

avec $(\theta,\varphi)\in U=(0,2\pi)\times(\pi/2,\pi)$.

L'intégrale de surface nous donne

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \mathrm{rot}(\mathbf{f})\cdot ds &= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi} -\sin\varphi(2\sin\theta\sin\varphi,0,0)\\ &\quad\cdot(\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\varphi)d\theta d\varphi\\ &= -2\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\sin^3\varphi d\theta d\varphi\\ &= 0\end{aligned}$$

(2) Calculons $\int_{\partial\Sigma} f\cdot dl$. Le bord orienté (positivement de Σ est paramétré par

$$\gamma(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta,0)\ ,\ \theta: 0\to 2\pi$$

Donc

$$\int_{\partial\Sigma} f\cdot dl=\int_0^{2\pi}(0,0,\sin^2\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0)d\theta=0.$$

Exercice 5. Vérifier le théorème de la divergence pour la champ vectoriel $\mathbf{f}(x,y,z)=(xy,yz,xz)$ et le tétraèdre unité donné par

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 0<z<1-x-y,\ 0<y<1-x,\ 0<x<1\}.$$

Corrigé l'exercice 5. (1) Calculons $\iiint_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{f})dxdydz$. On a $\mathrm{div}(\mathbf{f})=x+y+z$ et

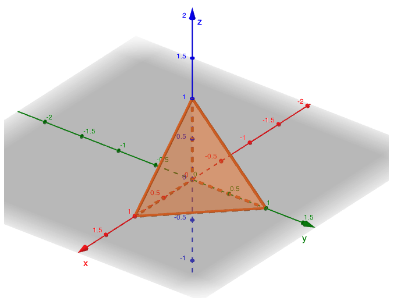
$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 0<z<1-x-y,\ 0<y<1-x,\ 0<x<1\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{f})dxdydz &= \int_{x=0}^1\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{1-x-y}(x+y+z)dzdydx\\ &= \frac{1}{2}\int_{x=0}^1\int_{y=0}^{1-x}(1-(x+y)^2)dydx=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

(2) Calculons $\iint_{\partial\Omega} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}ds$. On a $\partial\Omega = \Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3\cup\Sigma_4$, avec

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \{\alpha(x,z)=(x,0,z)\ : 0\le z\le 1-x,\ 0\le x\le 1\}\\
\Sigma_2 &= \{\beta(x,y)=(x,y,0)\ : 0\le y\le 1-x,\ 0\le x\le 1\}\\
\Sigma_3 &= \{\gamma(y,z)=(0,y,z)\ : 0\le z\le 1-y,\ 0\le y\le 1\}\\
\Sigma_4 &= \{\delta(x,y)=(x,y,1-x-y)\ : 0\le y\le 1-x,\ 0\le x\le 1\}
\end{aligned}$$



Les normales correspondantes sont

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= \frac{\partial\alpha}{\partial x}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial z} = (0,-1,0)\ \text{ normale extérieure}\\
\mathbf{n}_2 &= \frac{\partial\beta}{\partial x}\wedge\frac{\partial\beta}{\partial y} = (0,0,1)\ \text{ normale intérieure}\\
\mathbf{n}_3 &= \frac{\partial\gamma}{\partial y}\wedge\frac{\partial\gamma}{\partial z} = (1,0,0)\ \text{ normale intérieure}\\
\mathbf{n}_4 &= \frac{\partial\delta}{\partial x}\wedge\frac{\partial\delta}{\partial y} = (1,1,1)\ \text{ normale extérieure}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}ds &= \int_{\Sigma_1}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n_1}ds-\int_{\Sigma_2}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n_2}ds-\int_{\Sigma_3}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n_3}ds+\int_{\Sigma_4}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n_4}ds\\
&= 0-0-0\\
&+ \int_0^1\int_0^{1-x}((xy,y(1-x-y),x(1-x-y))\cdot(1,1,1)dydx\\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Exercice 6. Soit le champ $\mathbf{f}(x,y,z)=(y^2,-x^2,z)$ et Γ la courbe d'intersection du plan $y+z=3$ avec le cylindre $x^2+y^2=1$.

En utilisant le théorème de Stokes, calculer $\int_\Gamma \mathbf{f}$.

Corrigé l'exercice 6. Soit Γ la courbe d'intersection du plan $y+z=3$ avec le cylindre $x^2+y^2=1$; soit S la surface délimitée par Γ. Cette surface est paramétrée par

$$\begin{array}{rlcl}
\alpha & : D=]0,2\pi[\times]0,1[& \to & \mathbb{R}^3\\
 & (\theta,\rho) & \mapsto & (\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,3-\rho\sin\theta)
\end{array}$$

La fonction α est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\theta}\wedge\dfrac{\partial\alpha}{\partial\rho}=(0,-\rho,-\rho)$.

Le champs $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{f} = -(0,0,2x+2y) = (0,0,2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta)$$

Nous avons donc par le théorème de Stokes

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\alpha = \iint_S \mathbf{rot}\ \mathbf{f}\cdot dS &= \iint_D \mathbf{rot}\ \mathbf{f}(\alpha(\theta,\rho))\cdot(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial\rho})d\theta d\rho\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1(2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta)\rho d\theta d\rho\\
&= \int_0^{2\pi}(\frac{2\cos\theta}{3}+\frac{2\sin\theta}{3})d\theta = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 7. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par les trois surfaces d'équations

$$x^2+y^2=1,\quad z=0\ \text{ et }\ x+z=1.$$

Soit S le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur.

Notons S_1 la partie de S contenue dans la surface $x+z=1$, elle est donc paramétrée par $x(r,\theta)=r\cos\theta$, $y(r,\theta)=r\sin\theta$ et $z(r,\theta)=1-r\cos\theta$ avec $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$.

Notons aussi S_2 la partie contenue dans la surface $z=0$, elle est donc paramétrée par $x(r,\theta)=r\cos\theta$, $y(r,\theta)=r\sin\theta$ et $z(r,\theta)=0$ avec $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$.

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs donné par $\mathbf{f}(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$.

(a) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_1.

(b) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_2.

(c) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers S en utilisante la formule d'Ostrogradsky (théorème de divergence). Calculer d'abord la divergence de $\mathbf{f}$.

(d) Soit C l'intersection de des surfaces $x^2+y^2=1$ et $x+z=1$. En utilisant la formule de Stokes, calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long de la courbe C, orientée dans le sens trigonométrique, vue d'en haut.

Corrigé l'exercice 7. (a) On considère le paramétrage de la surface S_1 donné dans l'énoncé

$$\alpha(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - r\cos\theta) \text{ avec } (r,\theta) \in [0,1]\times[0,2\pi]$$

Le vecteur normal est donc

$$\mathbf{n} = \frac{\partial\alpha}{\partial r} \wedge \frac{\partial\alpha}{\theta r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

On a aussi

$$\mathbf{f}(\alpha(r,\theta)) \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 + r(\cos\theta + \sin\theta) \\ 1 - 2r\cos\theta \\ r(\cos\theta - \sin\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = r(-1 + 2r\cos\theta)$$

Le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_1 orientée vers le haut est donc égal à

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}ds &= \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} \mathbf{f}(\alpha(r,\theta))\cdot\mathbf{n}drd\theta \\ &= \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} r(-1+2r\cos\theta)drd\theta \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

(b) Même raisonnement qu'en (a). Dans ce cas

$$\alpha(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \text{ avec } (r,\theta) \in [0,1]\times[0,2\pi]$$

Donc

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}ds &= \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} \mathbf{f}(\alpha(r,\theta))\cdot\mathbf{n}drd\theta \\ &= \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} r^2(\cos\theta - \sin\theta)drd\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

(c) La divergence de $\mathbf{f}$ est

$$\mathbf{Div}(\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial x}(y-z) + \frac{\partial}{\partial y}(z-x) + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) = 0$$

D'après le théorème de la divergence (formule d'Ostrogradsky) le flux de $\mathbf{f}$ à travers S vaut $\iiint_D \mathbf{Div}(\mathbf{f}) = 0$.

(d) D'après les notations de (a) l'aire de S_1 est égal à

$$\text{Aire}(S_1) := \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} \|\frac{\partial\alpha}{\partial r} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\|drd\theta$$

avec $\frac{\partial\alpha}{\partial r} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} = (r,0,r)$ et $\|\frac{\partial\alpha}{\partial r} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\| = \sqrt{r^2+r^2} = \sqrt{2}r$, soit

$$\text{Aire}(S_1) := \sqrt{2}\iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} rdrd\theta = \sqrt{2}\pi$$

(e) D'après le théorème de Stokes, la circulation de $\mathbf{f}$ le long de C orientée comme dans l'énoncé est égal au flux de $\mathbf{rot}(\mathbf{f})$ à travers S_1, orientée vers le haut. On pose $P(x,y,z) = y - z$, $Q(x,y,z) = z - x$ et $R(x,y,z) = x - y$), soit

$$\mathbf{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

On a

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(x-y) - \frac{\partial}{\partial z}(z-x) = -2$$

et par symétrie,

$$\mathbf{rot}(\mathbf{f}) = (-2,-2,-2)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{f}\cdot d\alpha &= \iint_{S_1} \mathbf{rot}(\mathbf{f})\cdot\mathbf{n}ds \\ &= \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} (-2,-2,-2)\cdot(r,0,r)drd\theta \\ &= \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} -4rdrd\theta \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

Exercice 8. Soit le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,xyz)$$

défini sur $\mathbb{R}^3$.

Considérons la boule unité paramétrée par

$$x = r\cos\theta\sin\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\varphi$$

avec $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$ et $r \in [0,1]$.

(1) Calculer $\iiint_V \text{div}(\mathbf{F})dxdydz$ où V est la boule unité.

(2) Calculer $\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$ où Σ est la sphère unité et $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à Σ sortant de la boule unité.

(3) Commenter ces deux résultats.

Corrigé l'exercice 8. Le paramétrage

$$(r,\theta,\varphi) \to (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

($\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$ et $r \in [0,1]$) correspond aux coordonnées sphériques (voir l'exercice 1) avec la colatitude. Dans ce cas, le jacobien est $-r^2\sin(\varphi)$. On calcule la divergence $\text{div}(\mathbf{F}) = xy$.

1. Donc

$$\begin{aligned}&\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx\, dy\, dz\\ =&\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -r^4\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(\varphi)^3\, dr\, d\theta\, d\varphi\\ =&\ 0.\end{aligned}$$

2. La surface Σ est paramétrée par

$$\sigma : (\theta, \varphi) \to (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$$

$\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$. Le vecteur normal est

$$\mathbf{n} = \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = -(\cos\theta\sin^2\varphi, \sin\theta\sin^2\varphi, \sin\varphi\cos\varphi)$$

On trouve donc

$$\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} dS = 0$$

3. C'est cohérent avec le théorème de la divergence : $\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx\, dy\, dz = \iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} dS$.

Exercice 9. Soit la surface

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2 + y^2 = z^4,\ \ 0 \le z \le 1\},$$

et soit $\Gamma = \partial\Sigma$ son bord.

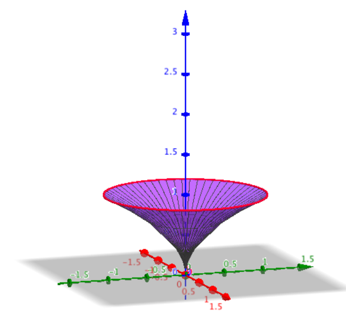
On donne les paramétrisations de Σ et Γ :

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{\sigma(r, \theta) = (r^2\cos\theta, r^2\sin\theta, r)\ ;\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\},\\ \Gamma &= \{\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)\ ;\ \theta : 0 \to 2\pi\}.\end{aligned}$$

Considérons le champ vectoriel $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2y, z, x)$$

(1) Calculer $\mathbf{rot}(\mathbf{f})$.
(2) Calculer $\iint_\Sigma \mathbf{rot}(\mathbf{f})\cdot dS$.
(3) Calculer l'integrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\ell$.
(4) Le théorème de Stokes est-il vérifié pour $(\mathbf{f}, \Sigma)$?



Corrigé l'exercice 9. (1) On a $\mathbf{rot}(\mathbf{f})(x, y, z) = (-1, -1, -x^2)$.
(2) On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\sigma(r, \theta) \wedge \frac{\partial}{\partial\theta}\sigma(r, \theta) &= (2r\cos\theta, 2r\sin\theta, 1) \wedge (-r^2\cos\theta, r^2\cos\theta, 0)\\ &= (-r^2\cos\theta, -r^2\sin\theta, 2r^3)\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \mathbf{rot}(\mathbf{f})\cdot dS &= \int_0^1\int_0^{2\pi}(-1, -1, -r^4\cos^2\theta)\cdot(-r^2\cos\theta, -r^2\sin\theta, 2r^3))d\theta dr\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(r^2(\cos\theta + \sin\theta) - 2r^7\cos^2\theta\right) d\theta dr\\ &= -2\int_0^1\int_0^{2\pi} r^7\cos^2\theta d\theta dr = -\tfrac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(3) On a

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi}\mathbf{f}(\gamma(\theta))\cdot\gamma'(\theta)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}(\cos^2\theta\sin\theta, 1, \cos\theta)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta, 0)d\theta\\ &= -\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta = -\tfrac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(4) Comme $\iint_\Sigma \mathbf{rot}(\mathbf{f})\cdot dS = \int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\ell$ le théorème de Stokes est vérifié.

Exercice 10. Soit Ω le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par les surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \text{ et } z \ge 0$$

(1) Faire un dessin de Ω
(2) Calculer le volume de Ω.

Notons Σ le bord de Ω orienté suivant le vecteur normal extérieur.

Notons Σ_1 la partie de Σ contenue dans la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On peut paramétrer Σ_1 par

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) &= \sin\varphi\cos\theta\\ y(\varphi, \theta) &= \sin\varphi\sin\theta \qquad (\varphi, \theta) \in [0, \pi/2]^2.\\ z(\varphi, \theta) &= \cos\varphi\end{cases}$$

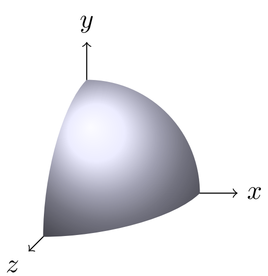
Notons aussi $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$ (le complémentaire de Σ_1 dans Σ).
Soit le champ vectoriel donné par

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$$

(3) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers Σ_1.
(4) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers Σ_2.
(5) Calculer l'aire de Σ_1.
(6) Calculer l'aire de Σ_2.
(7) Soit la courbe C, bord de Σ_1, orientée dans le sens trigonométrique par rapport à l'orientation de Σ_1 (dont le vecteur normal est vers l'extérieur). En utilisant la formule de Stokes, calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long de la courbe C.

On rappelle que le volume de la boule unité est $4\pi/3$ et que l'aire de la sphère unité est 4π.

Corrigé l'exercice 10. (1) Dessin :



(2) Le domaine Ω est l'intersection de la boule unité d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et de l'octant $\{(x,y,z),\ \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. C'est le huitième de la boule unité qui se trouve dans cet octant.

(3) Le bord de Ω est composé huitième de la sphère unité : $\Sigma_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ et des quarts de disques $S_1 = \{z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}$, $S_2 = \{x = 0,\ z^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 0, y \geq 0\}$ et $S_3 = \{y = 0,\ x^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0, z \geq 0\}$. On a alors $\Sigma = \Sigma_1 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$ et $\Sigma_2 = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

On paramètre Σ_1 par

$$\sigma(\varphi,\theta) = \begin{cases} x(\varphi,\theta) & = \sin\varphi\cos\theta \\ y(\varphi,\theta) & = \sin\varphi\sin\theta \\ z(\varphi,\theta) & = \cos\varphi \end{cases} \qquad (\varphi,\theta) \in [0,\pi/2]^2.$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} &= (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi) \\ \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} &= (-\sin\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta, 0) \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = (\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\varphi)$$

est un vecteur normal sortant. D'où

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \mathbf{f}\cdot dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \mathbf{f}(\sigma(\varphi,\theta))\cdot(\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\theta})d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} (\sin^3\varphi\cos^3\theta, \sin^3\varphi\sin^3\theta, \cos^3\varphi) \\ &\quad \cdot(\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\varphi)d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin^5\varphi(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + \cos^4\varphi\sin\varphi\ d\varphi d\theta \\ &= \frac{3\pi}{10} \end{aligned}$$

Pour une intégrale du type $\int \sin^5(\varphi)d\varphi$ on utlise

$$\int \sin^5(\varphi)d\varphi = \int (\sin^2(\varphi)^2\sin\varphi d\varphi = \int (1-\cos^2\varphi)^2\sin\varphi d\varphi$$

puis un changement de variable $u = \cos\varphi$. Même chose pour $\int \sin^4(\varphi)d\varphi$ et $\int \cos^4(\varphi)d\varphi$.

(4) On a $\Sigma_2 = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ et le flux de $\mathbf{f}$ à travers Σ_2 est la somme des flux de $\mathbf{f}$ à travers chaque surface S_i. On pour chaque S_i le vecteur normal est perpendiculaire à S_i en chaque point donc le flux à travers S_i est nul. Donc $\iint_{\Sigma_2} \mathbf{f}\cdot dS = 0$.

(6) Σ_1 est le huitième de la sphère unité, son aire est donc $\frac{1}{8} \times 4\pi = \frac{\pi}{2}$.

(7) Σ_2 est la réunion disjointe des 3 quarts de disque unité, son aire est donc $\frac{3}{4} \times \pi = \frac{3\pi}{4}$.

(8) Remarquons que la circulation le long de C est égale à la somme des circulations sur le bord de chacune des faces S_1, S_2, S_3. Sur les arrêtes droites, les circulations se compenses deux à deux (faire un dessin). D'après la formule de Stokes, on a par exemple

$$\int_{\partial S_1} \mathbf{f}\cdot dl = \iint_{S_1} \mathrm{rot}(\mathbf{f})\cdot dS$$

Or $\text{rot}(\mathbf{f}) = (0,0,0)$, donc $\int_{\partial S_1} \mathbf{f} \cdot dl = 0$. Par symétrie $\int_{\partial S_2} \mathbf{f} \cdot dl = 0$ et $\int_{\partial S_3} \mathbf{f} \cdot dl = 0$. Ainsi $\int_C \mathbf{f} \cdot dl = \boxed{0}$

Exercice 11. Soit le champs de vecteurs $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$(x,y) \mapsto \mathbf{f}(x,y) = (xy^2, x^2y)$$

On pose $P(x,y) = xy^2$ et $Q(x,y) = x^2y$.

(1) (a) Calculer $\text{rot}(\mathbf{f})$.

(b) Montrer que l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{f}$ est nulle lorsque Γ est un courbe simple fermée.

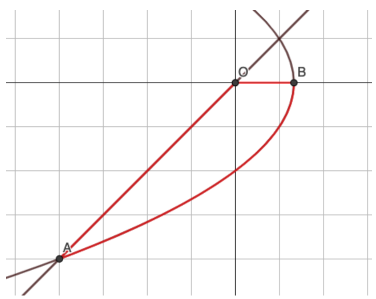
(2) Soit la courbe $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où

Γ_1 : l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 4-3x$ limitée en A par la droite d'équation $y = x$ et en B par l'axe des $x \geq 0$;

Γ_2 : le segment de droite allant de B à O ;

Γ_3 : le segment de droite allant de O à A.

Les points A et B sont à determiner.



(a) En utilisant un paramétrage adapté à chaque cas, calculer :

(i) $\int_{\Gamma_3} \mathbf{f}$.

(ii) $\int_{\Gamma_2} \mathbf{f}$.

(iii) $\int_{\Gamma_1} \mathbf{f}$. Calculer $\int_{\Gamma_1} \mathbf{f}$ de deux manières différentes (Ind. utiliser la question (1)).

(b) Determiner un potentiel h de $\mathbf{f}$.

(c) Retrouver $\int_{\Gamma_i} \mathbf{f}$ pour $i = 1,2,3$.

Corrigé l'exercice 11. Les abscisses des points d'intersections entre la parabole $y^2 = 4-3x$ et la droite $y = x$ sont les solutions de $x^2+3x-4 = 0$ après calcul on trouve $x = 1$ et $x = -4$, par suite $y = 1$ et $y = -4$ respectivement. Ainsi $A = (-4,-4)$. L'abscisse du point B est solution de $0 = 4-3x$, d'où $x = \frac{4}{3}$, ainsi $B = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$.

(1) (a) On a

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\mathbf{f})(x,y) &= \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial\left(x^2y\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial y} \\
&= 2yx - 2yx \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) Soit $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = xy^2dx + x^2ydy$ la forme différentielle associée au champ $\mathbf{f}$. Donc $\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \mathbf{f}$. D'après (a), la forme différentielle ω est fermée, comme elle est définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est un domaine étoilé d'après le théorème de Poincaré, elle est exacte, en particulier son intégrale curviligne est nulle le long de tout courbe simple fermée.

(2) (a)

(i) Γ_3 a pour paramétrage : $\gamma_3(t) = (-t,-t)$ avec $t = 0 \to t = 4$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_3} \mathbf{f} &= \int_0^4 \mathbf{f}(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t)dt \\
&= \int_0^4 \left((-t)\left((-t)^2\right)(-1) + (-t)(-t)^2(-1)\right)dt \\
&= 2\int_0^4 t^3dt = 128.
\end{aligned}$$

(ii) Γ_2 a pour paramétrage : $\gamma_2(t) = \left(\frac{4}{3} - t, 0\right)$ avec $t = 0 \to t = \frac{4}{3}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2} \mathbf{f} &= \int_0^{\frac{4}{3}} \mathbf{f}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)dt \\
&= \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\left(\frac{4}{3} - t\right) \times 0^2, \left(\frac{4}{3} - t\right)^2 \times 0\right) \cdot (-1,0)dt \\
&= \int_0^{\frac{4}{3}} 0dt = 0.
\end{aligned}$$

(iii) Γ_1 a pour paramétrage : $\gamma_1(t) = \left(\frac{4-t^2}{3}, t\right)$ avec $t = -4 \to t = 0$.

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{f} &= \int_{-4}^{0} \mathbf{f}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_2 1(t) dt \\
&= \int_{-4}^{0} \left(\left(\frac{4-t^2}{3} \right) t^2(-1) + t \left(\frac{4-t^2}{3} \right)^2 (1) \right) dt \\
&= \int_{-4}^{0} \left(-\left(\frac{4-t^2}{3} \right) t^2 + t \left(\frac{4-t^2}{3} \right)^2 \right) dt \\
&= \int_{-4}^{0} \frac{16}{9}t - \frac{4}{3}t^2 - \frac{8}{9}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + \frac{1}{9}t^5 dt \\
&= -128
\end{aligned}$$

Deuxième méthode : d'après (1), comme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ est fermée,

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{f} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{f} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} = 0$$

Donc

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{f} = -\int_{\Gamma_2} \mathbf{f} - \int_{\Gamma_3} \mathbf{f} = -128.$$

(b) On sait d'après (1) que $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{f} = \nabla h$. Donc

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = xy^2 \Longrightarrow h = \frac{x^2y^2}{2} + g(y) \text{ et} \\ \frac{\partial h}{\partial y} = x^2y \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Longrightarrow g \text{ est constante} \end{cases}$$

On peut donc choisir $g = 0$ d'où $h(x, y) = \frac{x^2y^2}{2}$ est une primitive de $\mathbf{f}$.

(c) En utilisant h on obtient

$\int_{\Gamma_3} \mathbf{f} = h(A) - h(O) = 128 - 0 = 128.$

$\int_{\Gamma_2} \mathbf{f} = h(O) - h(B) = 0 - 0 = 0.$

$\int_{\Gamma_1} \mathbf{f} = h(B) - h(A) = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2 \times 0^2}{2} - \frac{(-4)^2 \times (-4)^2}{2} = -\frac{4^4}{2} = -128.$