Séance 2

Intégrales curvilignes et théorème de Green

Exercice 1. Calculer $\int_\Gamma (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$ où Γ est le triangle de sommets $O(0,0)$, $A(0,1)$ et $B(-1,0)$ parcouru dans le sens trigonométrique.

Exercice 2. (a) Soit $\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = f(x), x\in[a,b]\}$. Donner une paramétrisation de Γ. Montrer que la longueur de la courbe Γ est donnée par

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}dt.$$

(b) Calculer la longueur de la courbe $\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = \cosh x, x\in[0,1]\}$.
(c) Soit $\Gamma' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x(t) = r(t)\cos t, y(t) = r(t)\sin t, t\in[a,b]\}$.
Calculer la longueur de Γ' en fonction de r.
Retrouver la longueur d'un cercle de de centre O et rayon R.

Exercice 3. Soit $\mathbf{f}$ le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{y} \\ x^3+y \end{pmatrix}, \quad \forall(x,y), \quad y\geq 0.$$

(a) Calculer l'intégrale de curviligne de $\mathbf{f}$ de $(0,0)$ à $(1,1)$ le long du chemin : $x = t^2$, $y = t^3$, $0\leq t\leq 1$. Montrer que l'intégrale vaut $59/42$.
(b) Sur le chemin $x(t) = t$, $y(t) = t$, $0\leq t\leq 1$, montrer que l'intégrale vaut $17/12$.
Existe-t-il un champ scalaire g tel que $\mathbf{f} = \nabla g$?
(c) La même courbe que dans le point (a) est décrite par la paramétrisation : $\beta(t) = (t, t^{3/2})$, pour $0\leq t\leq 1$. Montrer que l'on retrouve la valeur de l'intégrale.

Exercice 4. Soit $\mathbf{f}(x,y,z) = (y,z,x)$, et l'hélice circulaire Γ de hauteur h paramétrée par $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$ pour $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.
(a) Calculer la longueur de cette hélice.
(b) Montrer que

$$\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\alpha = \frac{\pi r}{4}(2h-r).$$

Exercice 5. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{f}(x,y) = (\frac{2x\tan(y)}{(1+x^2)^2}, -\frac{1+\tan^2(y)}{1+x^2}, 0)$$

(a) Trouver $\mathbf{h}$ tel que $\mathbf{f} = \nabla\mathbf{h}$.
(b) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{f}$ le long de l'arc de l'hélice $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = \theta$, qui va du point $\theta = 0$ au point $\theta = \pi/2$.

Exercice 6. Considérons un champ de force $\mathbf{f}(x,y) = (\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y)$ et l'ellipse d'équation :

$$4x^2+y^2 = 4.$$

A l'aide du théorème de Green calculer le travail du champ de force $\mathbf{f}$ le long de cette ellipse.

Exercice 7. En utilisant le théorème de Green montrer la formule

$$\iint_{\mathcal{A}} dx\,dy = 1/2\int_{\partial\mathcal{A}} xdy - ydx.$$

et calculer l'aire de l'astroïde $\mathcal{A}$ délimité par la courbe d'équation $x(t) = a\cos^3(t)$; $\quad y(t) = a\sin^3(t)$ pour $t\in[0,2\pi]$.

Exercice 8. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{f}(x,y) = (2xy+y^2-1, 2xy+x^2).$$

(1) Calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long du segment de $A = (1,0)$ vers $B = (0,1)$.
(2) Déterminer si $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel h, calculer h.
(3) Calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long de la courbe Γ paramétrée par

$$\gamma(t) = (\cos^5(t), \sin^4(t)), \quad t = \pi/2 \to t = \pi.$$

Exercice 9. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{f}(x,y) = (x^2y, 2xy).$$

Soit la surface

$$S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \ 1\leq x^2+y^2 < 4\}$$

et soit Γ son bord orienté de façon à ce que le S soit à gauche de Γ.
(1) Calculer $\int_{\partial S} \mathbf{f}\cdot d\ell$.
(2) Calculer $\int\int_S \mathrm{rot}(f)dxdy$.
Le théorème de Green est-il vérifié pour $(\mathbf{f}, S)$?