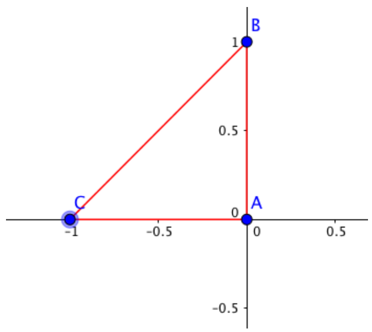
Séance 2

Intégrales curvilignes et théorème de Green

Exercice 1. Calculer $\int_\Gamma (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$ où Γ est le triangle de sommets $O(0,0)$, $A(0,1)$ et $B(-1,0)$ parcouru dans le sens trigonométrique.

Corrigé l'exercice 1. On oriente le triangle $\Gamma = OAB$ dans le sens trigonometrique



On calcule l'intégrale de la forme différentielle $\omega = (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$ sur les trois segments de droite constituant Γ.

– Le segment $[OA]$ est paramétré par $x=0$, $y=t$ avec $t\in[0,1]$, donc $\omega = -t^2dt$ et $\int_{OA}\omega = -\int_0^1 t^2dt = -1/3$;

– Sur AB on paramètre en posant $x=t$, $y=t+1$, avec $t\in[0,-1]$ (pour respecter le sens de parcours t varie de 0 à -1), donc $\omega = (t^2+(1+t)^2)dt + (t^2-(1+t)^2)dt = 2t^2dt$ et $\int_{AB}\omega = 2\int_0^{-1} t^2dt = -2/3$.

– Sur BO on paramètre en posant $y=0$, $x=t$ avec $t\in[-1,0]$, donc $\omega = t^2dt$ et $\int_{BO}\omega = \int_{-1}^0 t^2dt = 1/3$.

Finalement $\int_\Gamma \omega = -1/3 - 2/3 + 1/3 = -2/3$.

Exercice 2. (a) Soit $\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = f(x), x\in[a,b]\}$. Donner une paramétrisation de Γ. Montrer que la longueur de la courbe Γ est donnée par

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}dt.$$

(b) Calculer la longueur de la courbe $\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = \cosh x, x\in[0,1]\}$.
(c) Soit $\Gamma' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x(t) = r(t)\cos t, y(t) = r(t)\sin t, t\in[a,b]\}$.
Calculer la longueur de Γ' en fonction de r.
Retrouver la longueur d'un cercle de de centre O et rayon R.

Corrigé l'exercice 2. (a) On paramétre avec $\alpha(t) = (t, f(t))$ et on obtient la formule demandée

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}dt.$$

(b)

$$\int_0^1 \cosh(t)dt = \sinh(1).$$

(c)

$$\int_a^b \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}dt$$

Pour le cercle, on trouve $2\pi R$!

Exercice 3. Soit $\mathbf{f}$ le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{y} \\ x^3+y \end{pmatrix}, \quad \forall (x,y), \quad y\geq 0.$$

(a) Calculer l'intégrale de curviligne de $\mathbf{f}$ de $(0,0)$ à $(1,1)$ le long du chemin : $x=t^2$, $y=t^3$, $0\le t\le 1$. Montrer que l'intégrale vaut $59/42$.

(b) Sur le chemin $x(t)=t$, $y(t)=t$, $0\le t\le 1$, montrer que l'intégrale vaut $17/12$.

Existe-t-il un champ scalaire g tel que $\mathbf{f} = \nabla g$?

(c) La même courbe que dans le point (a) est décrite par la paramétrisation : $\beta(t) = (t, t^{3/2})$, pour $0\le t\le 1$. Montrer que l'on retrouve la valeur de l'intégrale.

Corrigé l'exercice 3. (a)

$$\int_\Gamma \mathbf{f} = \int_0^1 \sqrt{y(t)}x'(t) + \left(x^3(t)+y(t)\right)y'(t)dt = 59/42.$$

(b)

$$\int_{\Gamma'} \mathbf{f} = \int_0^1 \sqrt{y(t)}x'(t) + \left(x^3(t)+y(t)\right)y'(t)dt = 17/12.$$

Ceci montre que $\mathbf{f}$ ne dérive pas d'un champ scalaire.

(c)

$$\int_{\Gamma''} \mathbf{f} = \int_0^1 \sqrt{y(t)}x'(t) + (x^3(t) + y(t))y'(t)dt = 59/42.$$

On retrouve l'invariance par changement de paramétrage.

Exercice 4. Soit $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, z, x)$, et l'hélice circulaire Γ de hauteur h paramétrée par $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(a) Calculer la longueur de cette hélice.

(b) Montrer que

$$\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\alpha = \frac{\pi r}{4}(2h - r).$$

Corrigé l'exercice 4. Soit $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, z, x)$, et l'hélce circulaire Γ paramétrée par $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(a)

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{\pi/2} ||\alpha'(t)||dt = \pi/2\sqrt{r^2 + h^2}.$$

(b)

$$\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\alpha = \int_0^{\pi/2} -r^2\sin(t)^2 + hrt\cos(t) + rh\cos(t)dt = \frac{\pi r}{4}(2h - r).$$

Exercice 5. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{f}(x, y) = (\frac{2x\tan(y)}{(1 + x^2)^2}, -\frac{1 + \tan^2(y)}{1 + x^2}, 0)$$

(a) Trouver $\mathbf{h}$ tel que $\mathbf{f} = \nabla\mathbf{h}$.

(b) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{f}$ le long de l'arc de l'hélice $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = \theta$, qui va du point $\theta = 0$ au point $\theta = \pi/2$.

Corrigé l'exercice 5. Si $\mathbf{h}$ est tel que $\mathbf{f} = \nabla\mathbf{h}$, alors $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$, autrement dit, $\mathbf{h}$ ne depend pas de z.

Cherchons $\mathbf{h}$ conne fonction de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, disons de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\mathbf{f} = \nabla\mathbf{h} \iff \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{2x\tan(y)}{(1+x^2)^2} & (3) \\ \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{1+\tan^2(y)}{1+x^2} & (4) \end{cases}$$

(3) nous dit que $\mathbf{h}$ s'écrit $\mathbf{h}(x, y) = -\frac{\tan(y)}{1+x^2} + g(y)$ où g est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$; en redérivant cette relation par rapport à y et en comparant à (4), il vient $g'(y) = 0$, soit $g(y) = c \in \mathbb{R}$.

Finalement $\mathbf{f} = \nabla\mathbf{h} \iff \mathbf{h}(x, y, z) = -\frac{\tan(y)}{1+x^2} + c$, avec c constante.

Comme le domaine (de définition) n'est pas connexe, pour rendre ceci parfaitement rigoureux, il faut remarquer $\mathbf{f}$ et $\mathbf{h}$ ne sont définis que sur les bandes $D_k = \mathbb{R}\times]\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi[\times\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. On a pas de conditions de recollement, et on peut prendre une constante c différente sur chaque bande. En résumé $\nabla\mathbf{h} = \mathbf{f}$ ssi $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\exists c_k \in \mathbb{R}$, $\mathbf{h}_{|_{D_k}} = -\frac{\tan(y)}{1+x^2} + c_k := \mathbf{h}_k$.

(b) Le chemin Γ considéré est dans la bande D_0, puisque $\forall\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\sin\theta| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$. Comme $\mathbf{f}$ dérive du potentiel $\mathbf{h}_0$, on a

$$\int_\Gamma \mathbf{f} = \mathbf{h}_0(B) - \mathbf{h}_0(A)$$

où $A = (1, 0, 0)$ et $B = (0, 1, \pi/2)$, soit

$$\int_\Gamma \mathbf{f} = \mathbf{h}_0(B) - \mathbf{h}_0(A) = (-\frac{\tan(1)}{1 + 0^2} + c_0) - (-\frac{\tan(0)}{1 + 1^2} + c_0) = -\tan(1).$$

Exercice 6. Considérons un champ de force $\mathbf{f}(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ et l'ellipse d'équation :

$$4x^2 + y^2 = 4.$$

A l'aide du théorème de Green calculer le travail du champ de force $\mathbf{f}$ le long de cette ellipse.

Corrigé l'exercice 6. En posant $P(x, y) = \alpha x + \beta y$ et $Q(x, y) = \gamma x + \delta y$ et en appliquant le théorème de Green le travail est égal à

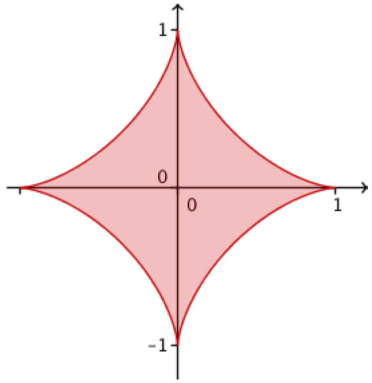
$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_D \partial_x Q - \partial_y P\, dxdy = (\gamma - \beta)\iint_D dxdy = (\gamma - \beta)2\pi.$$

Exercice 7. En utilisant le théorème de Green montrer la formule

$$\iint_{\mathcal{A}} dx\, dy = 1/2\int_{\partial\mathcal{A}} xdy - ydx.$$

et calculer l'aire de l'astroïde $\mathcal{A}$ délimité par la courbe d'équation $x(t) = a\cos^3(t); \quad y(t) = a\sin^3(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

Corrigé l'exercice 7. Voici l'astroïde pour $a = 1$:



En utilisant $P(x,y) = -y/2$ et $Q(x,y) = x/2$, on a

$$\iint_{\mathcal{A}} dx\,dy = 1/2 \int_{\partial\mathcal{A}} xdy - ydx.$$

Ici $xdy - ydx = 3a^2\sin(t)^2\cos(t)^2 dt$ donc en linéarisant

$$\iint_{\mathcal{A}} dx\,dy = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4t)}{8}\,dt = \boxed{\frac{3a^2\pi}{8}.}$$

Exercice 8. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{f}(x,y) = (2xy + y^2 - 1, 2xy + x^2).$$

(1) Calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long du segment de $A = (1,0)$ vers $B = (0,1)$.
(2) Déterminer si $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel h, calculer h.
(3) Calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long de la courbe Γ paramétrée par

$$\gamma(t) = (\cos^5(t), \sin^4(t)), \quad t = \pi/2 \to t = \pi.$$

Corrigé l'exercice 8. (1) On paramètre le segment $[A,B]$ avec

$$\alpha(t) = (1-t, t),\ t = 0 \to t = 1$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\ell &= \int_0^1 \mathbf{f}(\alpha(t)\cdot\alpha'(t)dt\\ &= \int_0^1 (2(1-t)+t^2-1, 2(1-t)+t^2)\cdot(-1,1)dt = \int_0^1 dt = 1\end{aligned}$$

(2) si $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel h, i.e. $\nabla h = \mathbf{f}$, alors

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = 2xy + y^2 - 1 \quad (1)$$
$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = 2xy + x^2 \quad (2)$$

de (1) on déduit que

$$h(x,y) = x^2y + xy^2 - x + \varphi(y) \quad (3)$$

En dérivant (3) par rapport à y et en comparant avec (2), on obtient

$$2xy + x^2 = x^2 + 2xy + \varphi'(y)$$

Donc $\varphi = c$ une constante. Ainsi $h(x,y) = x^2y + xy^2 - x + c$.
(3) Notons que $\gamma(\pi/2) = (0,1) = B$ et $\gamma(\pi) = (-1,0) = C$.
La circulation d'un champ gradient ne dépend que des extrémités de la courbe sur laquelle elle circule, on a

$$\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\ell = h(C) - h(B) = -(-1) + k - 0 - k = 1$$

Exercice 9. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{f}(x,y) = (x^2y, 2xy).$$

Soit la surface

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ 1 \le x^2 + y^2 < 4\}$$

et soit Γ son bord orienté de façon à ce que le S soit à gauche de Γ.
(1) Calculer $\int_{\partial S} \mathbf{f}\cdot d\ell$.
(2) Calculer $\int\int_S \mathrm{rot}(f)dxdy$.
Le théorème de Green est-il vérifié pour $(\mathbf{f}, S)$?

Corrigé l'exercice 9. Gamma est la couronne de rayons 1 et 2 (surface entre les cercles de contre O et de rayons 1 et 2). Le cercle C_2 de rayon 4 est orienté dans le sens trigonométrique alors que le cercle C_1 de rayon 1 est orienté dans le sens inverse. Donc

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\ell &= \int_{C_2}\mathbf{f}\cdot d\ell - \int_{C_1}\mathbf{f}\cdot d\ell\\ &= \int_0^{2\pi}(8\cos^2\theta\sin\theta, 8\cos\theta\sin\theta)\cdot(-2\sin\theta, 2\cos\theta)d\theta\\ &- \int_0^{2\pi}(\cos^2\theta\sin\theta, \cos\theta\sin\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta)d\theta\\ &= -4\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{15}{4}\pi.\end{aligned}$$

(b) On a On pose $P(x,y) = x^2y$ et $Q(x,y) = 2xy$, de sorte $\mathbf{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

$$\text{rot}(\mathbf{f})(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2y - x^2$$

Par suite, en utilisant les coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{aligned}
\int\int_S \text{rot}(f)dxdy &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (2r\sin\theta - r^2\cos^2\theta)rdrd\theta \\
&= \int_1^2 \int_0^{2\pi} -r^3\cos^2\theta drd\theta \\
&= -\pi \int_1^2 r^3 dr = -\frac{15}{4}\pi.
\end{aligned}$$