Partiel du 23/01/2017

Exercice 1. Rédoudre sur $]-1,1[$

$$(1-t^2)y'' - 4ty' - 2y = 0, \tag{1}$$

en cherchant des solutions développables en séries entières.

Solution. *Pour* $t \in]-1,1[$, $1-t^2 \neq 0$ *donc* (1) *est équivalente à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène définie sur* $]-1,1[$.

recherchons les fonctions développables en séries entières au voisignage de 0.

Analyse : Soit y *la somme de la série entière* $\sum_n a_n t^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$.

Sur $]-R,R[$,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, \quad y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$

et

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$$

ce qui donne

$$(1-t^2)y'' - 4ty' - 2y = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)(a_{n+2} - a_n)t^n.$$

Par unicité des coefficienst d'un developpement en série entière, on a trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)(a_{n+2} - a_n) = 0.$$

Ainsi y *est solution de* (1) *sur* $]-R,R[$ *si, et seulement si,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = a_n$$

On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = a_0$ *et* $a_{2p+1} = a_1$, *puis par sommabilité*

$$y(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}t^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_0 t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_1 t^{2p+1}$$

ce qui donne

$$y(t) = \frac{a_0}{1-t^2} + \frac{a_1 t}{1-t^2}$$

pour tout $t \in]-R, R[$ *avec nécessairement* $R \leq 1$.

Synthèse : Soit

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-t^2} \text{ et } \psi(t) = \frac{t}{1-t^2}$$

φ *est développable en série entière sur* $]-1,1[$ *et par les calculs précédent est solution de l'équation* (1) *sur* $]-1,1[$. *Il en est de même pour* ψ. *Les fonctions* φ *et* ψ *sont deux solutions indépendantes, elles forment donc un système fondamental de solution de* (1).

Conclusion : La solution générale de (1) *est*

$$\boxed{y(t) = \frac{\lambda + \mu t}{1-t^2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}.$$

Exercice 2. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' &= (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= -4x_1 + (t-3)x_2 \end{cases} \tag{2}$$

Vous pouvez mettre le système sous la forme $X'(t) = A(t)X(t)$, déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de $A(t)$ et ensuite réduire la matrice $A(t)$ pour résoudre votre système.

Solution. Le système (2) *peut se mettre sous la forme* $X'(t) = A(t)X(t)$ *avec*

$$A(t) = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $A(t)$ *est* $\chi_{A(t)}(X) = X^2 - 2tX + (t^2-1)$ *et* $Sp_{A(t)} = \{t+1, t-1\}$. *Ces deux valeurs propres étants distinctes,* $A(t)$ *est diagonalisable. On trouve* $E_{t+1}(A(t)) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_{t-1}(A(t)) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et on a alors*

$$A(t) = PD(t)P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

En posant $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = Y(t) = P^{-1}X(t)$, *on a*

$$\begin{aligned} X'(t) = A(t)X(t) &\iff Y'(t) = D(t)Y(t) \\ &\iff \begin{cases} y_1' &= (t+1)y_1 \\ y_2' &= (t-1)y_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_1 &= \lambda e^{(t^2+2t)/2} \\ y_2 &= \mu e^{(t^2-2t)/2} \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On trouve alors comme solution générale cherchée

$$\begin{aligned} X(t) &= PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\lambda \begin{pmatrix} e^{(t^2+2t)/2} \\ -e^{(t^2+2t)/2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{(t^2-2t)/2} \\ -2e^{(t^2-2t)/2} \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par les trois surfaces d'équations

$$x^2 + y^2 + 1, \quad z = 0 \ \text{ et } \ x + z = 1.$$

Soit S le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur.

Notons S_1 la partie de S contenue dans la surface $x + z = 1$, elle est donc paramétrée par $x(r, \theta) = r\cos\theta$, $y(r, \theta) = r\sin\theta$ et $z(r, \theta) = 1 - r\cos\theta$ avec $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Notons aussi S_2 la partie contenue dans la surface $z = 0$, elle est donc paramétrée par $x(r, \theta) = r\cos\theta$, $y(r, \theta) = r\sin\theta$ et $z(r, \theta) = 0$ avec $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs donné par $\mathbf{f}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.

(a) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_1.

(b) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_2.

(c) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers S en utilisante la formule d'Ostrogradsky (théorème de divergence). Calculer d'abord la divergence de $\mathbf{f}$.

(d) Soit C l'intersection de des surfaces $x^2 + y^2 = 1$ et $x + z = 1$.
En utilisant la formule de Stokes, calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long de la courbe C, orientée dans le sens trigonométrique, vue d'en haut.

Solution. (a) On considère le paramétrage de la surface S_1 donné dans l'énoncé $\alpha(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - r\cos\theta$ avec $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Le vecteur normal est donc

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \alpha}{\partial r} \wedge \frac{\partial \alpha}{\theta r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

On a aussi

$$\mathbf{f}(\alpha(r, \theta)) \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 + r(\cos\theta + \sin\theta) \\ 1 - 2r\cos\theta \\ r(\cos\theta - \sin\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = r(-1 + 2r\cos\theta)$$

Le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_1 orientée vers le haut est donc égal à

$$\begin{aligned} \textstyle\iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds &= \textstyle\iint_{[0,1) \times [0, 2\pi]} \mathbf{f}(\alpha(r, \theta)) \cdot \mathbf{n} dr d\theta \\ &= \textstyle\iint_{[0,1) \times [0, 2\pi]} r(-1 + 2r\cos\theta) dr d\theta \\ &= \boxed{-\pi}. \end{aligned}$$

(b) Même raisonnement qu'en (a). Dans ce cas $\alpha(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ avec $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Donc

$$\begin{aligned} \textstyle\iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds &= \textstyle\iint_{[0,1) \times [0, 2\pi]} \mathbf{f}(\alpha(r, \theta)) \cdot \mathbf{n} dr d\theta \\ &= \textstyle\iint_{[0,1) \times [0, 2\pi]} r^2(\cos\theta - \sin\theta) dr d\theta \\ &= \boxed{0}. \end{aligned}$$

(c) La divergence de $\mathbf{f}$ *est*

$$\mathbf{Div}(\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial x}(y-z) + \frac{\partial}{\partial y}(z-x) + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) = 0$$

D'après le théorème de la divergence (formule d'Ostrogradsky) le flux de $\mathbf{f}$ *à travers* S *vaut* $\iiint_D \mathbf{Div}(\mathbf{f}) = \boxed{0}$.

(d) D'après les notation de (a) le volume l'aire de S_1 *est égal à*

$$\mathrm{Aire}(S_1) := \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} \|\frac{\partial\alpha}{\partial r} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\| dr d\theta$$

avec $\frac{\partial\alpha}{\partial r} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} = (r,0,r)$ *et* $\|\frac{\partial\alpha}{\partial r} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\| = \sqrt{r^2+r^2} = \sqrt{2}r$*, soit*

$$\mathrm{Aire}(S_1) := \sqrt{2}\iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} r dr d\theta = \boxed{\sqrt{2}\pi}$$

(e) D'après le théorème de Stokes, la circulation de $\mathbf{f}$ *le long de* C *orientée comme dans l'énoncé est égal au flux de* $\mathbf{rot}(\mathbf{f})$ *à travers* S_1*, orientée vers le haut. On pose* $P(x,y,z) = y-z$*,* $Q(x,y,z) = z-x$ *et* $R(x,y,z) = x-y$*), soit*

$$\mathbf{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

On a

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(x-y) - \frac{\partial}{\partial z}(z-x) = -2$$

et par symétrie,

$$\mathbf{rot}(\mathbf{f}) = (-2,-2,-2)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{f}\cdot d\alpha &= \iint_{S_1} \mathbf{rot}(\mathbf{f})\cdot\mathbf{n} ds \\ &= \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} (-2,-2,-2)\cdot(r,0,r) dr d\theta \\ &= \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} -4r dr d\theta \\ &= \boxed{-4\pi}\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{f}(x,y) = (\frac{2x\tan(y)}{(1+x^2)^2}, -\frac{1+\tan^2(y)}{1+x^2}, 0)$$

(a) Trouver $\mathbf{h}$ tel que $\mathbf{f} = \nabla\mathbf{h}$.

(b) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{f}$ le long de l'arc de l'hélice $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = \theta$, qui va du point $\theta = 0$ au point $\theta = \pi/2$.

Solution. Si $\mathbf{h}$ *est tel que* $\mathbf{f} = \nabla\mathbf{h}$*, alors* $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$*, autrement dit,* $\mathbf{h}$ *ne depend pas de* z*.*

Cherchons $\mathbf{h}$ *conne fonction de* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, disons de classe* $\mathcal{C}^1$*,*

$$\mathbf{f} = \nabla\mathbf{h} \iff \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{2x\tan(y)}{(1+x^2)^2} & (3) \\ \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{1+\tan^2(y)}{1+x^2} & (4) \end{cases}$$

(3) nous dit que $\mathbf{h}$ *s'écrit* $\mathbf{h}(x,y) = -\frac{\tan(y)}{1+x^2} + g(y)$ *où* g *est une fonction réelle de classe* $\mathcal{C}^1$*; en redérivant cette relation par rapport à* y *et en comparant à (4), il vient* $g'(y) = 0$*, soit* $g(y) = c \in \mathbb{R}$.

Finalement $\mathbf{f} = \nabla\mathbf{h} \iff \mathbf{h}(x,y,z) = -\frac{\tan(y)}{1+x^2} + c$*, avec* c *constante.*

(b) Comme $\mathbf{f}$ *dérive d'un potentiel, on a*

$$\int_\Gamma \mathbf{f} = \mathbf{h}(B) - \mathbf{h}(A)$$

où $A = (1,0,0)$ *et* $B = (0,1,\pi/2)$*, soit*

$$\int_\Gamma \mathbf{f} = \mathbf{h}(B) - \mathbf{h}(A) = (-\frac{\tan(1)}{1+0^2} + c) - (-\frac{\tan(0)}{1+1^2} + c) = \boxed{-\tan(1)}.$$