Test du 18/11/2016

Corrigé

Exercice 1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, impaire et telle que $f(t)=\frac{\pi-t}{2}$ sur $]0;\pi]$

(a) Déterminer la nature de convergence de la série de Fourier de f.
(b) Déterminer les coefficients de Fourier de f.
(c) En déduit que la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$
(d) Déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

Corrigé : (a) f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc d'après le Théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f. La convergence ne peut être uniforme car si telle est le cas f serait continue en 0 en tant que limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

(b) La fonction f est impaire, donc $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par intégration par parties, $b_n=1/n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On en déduit qu'en tout point de continuité,

$$f(t)=\sum_1^\infty\frac{\sin(nt)}{n}.$$

(c) Pour $t=1$ on obtient

$$\sum_1^\infty\frac{\sin(n)}{n}=f(1)=\frac{\pi-1}{2}.$$

(d) Par la formule de Parseval

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{(\pi-t)^2}{4}dt=\frac{1}{6\pi}[-(\pi-t)^3]_0^\pi=\frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2. Soit la fonction porte

$$\Pi(t)=\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)=\begin{cases}1 & |t|\le\frac{1}{2}\\ 0 & |t|>\frac{1}{2}\end{cases}.$$

(a) Déterminer la transformée de Fourier de Π.
(b) Soit $\Pi_a(t)=\mathbf{1}_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(t)=\begin{cases}1 & |t|\le\frac{a}{2}\\ 0 & |t|>\frac{a}{2}\end{cases}$, où $a>0$. Déterminer la transformée de Fourier de Π_a.
(c) En déduire la valeur de l'intégral $\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin u}{u})^2du$.
(d) Calculer $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$.

Corrigé : (a) Si $\nu=0$ alors $\widehat{\Pi}(\nu)=1$. Si $\nu\neq0$ alors

$$\widehat{\Pi}(\nu) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi t\nu}\, dt = \left[\frac{e^{-2i\pi t\nu}}{-2i\pi\nu}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}.$$

On en déduit que

$$\widehat{\Pi}(\nu) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} & \nu \neq 0 \\ 1 & \nu = 0 \end{cases}.$$

(b) On remarque que $\Pi_a(t) = \Pi(t/a)$. On utilise alors la formule de changement d'échelle et on obtient $\widehat{\Pi}_a(\nu) = a\widehat{\Pi}(a\nu)$. C'est-à-dire, $\widehat{\Pi}_a(0) = a$ et $\widehat{\Pi}_a(\nu) = \frac{\sin(\pi a\nu)}{\pi\nu}$, si $\nu \neq 0$.

(c) On utilise la formule de Plancherel-Parseval. Comme $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\Pi}_{1/\pi}(\nu)|^2\, d\nu = \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{(\sin u)^2}{u^2} du$. Ainsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin u)^2}{u^2} du = \pi^2 \int_{\mathbb{R}} |\Pi_{1/\pi}(t)|^2\, dt = \pi.$$

(d) On utilise l'identité suivante avec la transformée de Fourier inverse (qui a bien un sens car $\widehat{\Pi}_{1/\pi}$ est L^1).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Pi}_{1/\pi}(u) e^{2i\pi u0}\, du = \pi\Pi_{1/\pi}(0) = \pi.$$

Exercice 3. (a) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto 4\cos^2 2t$.
(b) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto (5e^{2t} - 3)^2 \sin t$.
(c) Sachant que $\mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-1/s}}{s^{1/2}}) = \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$, calculer $\mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-a/s}}{s^{1/2}})$ où $a > 0$.

Corrigé : (a) On a $\cos^2(2t) = \frac{\cos(4t)+1}{2}$, donc $\mathcal{L}[4\cos^2(2t)](s) = 2\mathcal{L}[\cos(4t)](s) + 2\mathcal{L}[1](s) = \frac{2s}{s^2+16} + \frac{2}{s}$.
(b) On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(5e^{2t} - 3)^2 \sin(t)](s) &= 25\mathcal{L}[e^{4t}\sin(t)](s) - 30\mathcal{L}[e^{2t}\sin(t)](s) + 9\mathcal{L}[\sin(t)](s) \\ &= 25\mathcal{L}[\sin(t)](s-4) - 30\mathcal{L}[\sin(t)](s-2) + 9\mathcal{L}[\sin(t)](s) \\ &= \frac{25}{(s-4)^2+1} - \frac{30}{(s-2)^2+1} + \frac{9}{s^2+1} \\ &= \frac{25}{s^2-8s+17} - \frac{30}{s^2-4s+5} + \frac{9}{s^2+1} \end{aligned}$$

(c) Posons $F(s) = \frac{e^{-1/s}}{s^{1/2}}$, alors $F(s/a) = \sqrt{a}\frac{e^{-a/s}}{s^{1/2}}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-a/s}}{s^{1/2}}) = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathcal{L}^{-1}[F(s/a)](t) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{1/a}\mathcal{L}^{-1}[F(s)](\frac{t}{\frac{1}{a}}) \\ &= \sqrt{a}\mathcal{L}^{-1}[F(s)](at) \\ &= \sqrt{a}\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi at}} = \frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}} \end{aligned}$$

Exercice 4. On considère l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 16x + \sin x \tag{1}$$

où $y = y(x,t)$, avec les conditions

$$y(0,t) = 0, y(\pi,t) = 16\pi, y_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}y(x,t)_{|t=0} = 0, y(x,0) = 16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x$$

On pose $Y(x,s) = \mathcal{L}(y(x,t))(s)$ (transformée de Laplace par rapport à la variable t).
(a) Transformer (1) à l'aide de la transformée de Laplace, en déduire une équation différentielle notée (2) du second ordre en Y.

(b) Sachant qu'une solution particulière de l'équation (2) est de la forme $Y_P(s,x) = ax + b\sin x + c\sin 2x + d\sin 3x$, trouver les coefficients (a,b,c,d).

(c) et (d) Déterminer une solution homogène $Y_H(s,x)$ de l'équation homogène associée à (2). En déduire la solution générale de (2).

(e) Prendre la transformée de Laplace inverse de la solution générale trouvée ci-dessus pour déterminer la solution générale de l'équation (1).

Corrigé : (a) On prend la transformée de Laplace de l'EDP par rapport à la variable t, on trouve

$$(s^2Y(x,s) - sy(x,0) - y_t(x,0)) - 4\frac{d^2Y(x,s)}{dx^2} + Y(x,s) = \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s}$$

Puisque $y(x,0) = 16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x$ et $y_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}y(x,t)_{|t=0} = 0$, on trouve l'équation différentielle suivante (du second ordre par rapport à x) :

$$\frac{d^2Y}{dx^2} - \frac{1}{4}(s^2+1)Y = -\frac{4(s^2+1)x}{s} - \frac{\sin x}{4s} - 3s\sin(2x) + 2s\sin(3x). \tag{2}$$

avec les conditions initiales suivantes

$$Y(0,s) = \mathcal{L}[y(0,t)](s) = \mathcal{L}[0](s) = 0, \quad \text{et} \quad Y(\pi,s) = \mathcal{L}[y(\pi,t)](s) = 16\pi\mathcal{L}[1](s) = \frac{16\pi}{s} \tag{3}$$

D'après la forme du second membre de l'équation (2) [en tant que fonction de x] on déduit qu'une solution particulière de (2) est de la forme $Y_P(x,s) = ax + b\sin x + c\sin 2x + d\sin 3x$. En dérivant et substituant dans (2) et en égalant les coefficients des termes analogues, on trouve

$$Y_P(x,s) = \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37}$$

La solution générale de l'équation homogène associée à (2) est de la forme

$$Y_H(x,s) = c_1e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x} + c_2e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles. La solution générale de (2) est donc

$$Y(x,s) = Y_H(x,s) + Y_P(x,s) = c_1e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x} + c_2e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x} + \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37} \tag{4}$$

Les conditions initiales (3) portées en (4) donne

$$0 = Y(0,s) = c_1 + c_2, \quad \text{et} \quad \frac{16\pi}{s} = Y(\pi,s) = c_1e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\pi} + c_2e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\pi} + \frac{16\pi}{s}$$

donc $c_1 = c_2 = 0$ et

$$Y(x,s) = \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37}.$$

En prenant la transformée de Laplace inverse, on trouve la solution cherchée

$$y(x,t) = 16x + \frac{\sin x}{5}(1 - \cos\sqrt{5}t) + 12\sin 2x\cos\sqrt{17}t - 8\sin 3x\cos\sqrt{37}t.$$