Examen de rattrapage
14 Mars 2022
Calculatrices et documents non autorisés. Durée 1h.

N.B. L'exercice 1 est à faire par tous les étudiant-e-s, ensuite vous avez le choix de faire l'exercice 2 ou bien l'exercice 3.

Exercice 1. *On se propose de résoudre le système différentiel*

$$\begin{cases} x_1' &= (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= -4x_1 + (t-3)x_2 \end{cases}$$

(1) Mettre le système sous la forme $X'(t) = A(t)X(t)$, puis déterminer le polynôme caractéristique de $A(t)$ et les valeurs propres de $A(t)$.
(2) Déterminer les sous-espaces propres de $A(t)$.
(3) Diagonaliser $A(t)$: écrire $A(t)$ sous la forme $A(t) = PD(t)P^{-1}$.
(4) Posons $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
Résoudre le système différentiel $Y'(t) = D(t)Y(t)$.
(5) En déduire la résolution du système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$.

Corrigé l'exercice 1. Solution. Le système peut se mettre sous la forme $X'(t) = A(t)X(t)$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de $A(t)$ est $\chi_{A(t)}(X) = X^2 - 2tX + \left(t^2 - 1\right)$ et $Sp_{A(t)} = \{t+1, t-1\}$. Ces deux valeurs propres étants distinctes, $A(t)$ est diagonalisable.

On trouve $E_{t+1}(A(t)) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, E_{t-1}(A(t)) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et on a alors

$$A(t) = PD(t)P^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \; D(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

En posant $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = Y(t) = P^{-1}X(t)$ on a

$$\begin{aligned} X'(t) = A(t)X(t) \quad &\iff \quad Y'(t) = D(t)Y(t) \\ &\iff \begin{cases} y_1' &= (t+1)y_1 \\ y_2' &= (t-1)y_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_1 &= \lambda e^{\left(t^2+2t\right)/2} \\ y_2 &= \mu e^{\left(t^2-2t\right)/2}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve alors comme solution générale cherchée

$$\begin{aligned} X(t) = PY(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} e^{\left(t^2+2t\right)/2} \\ -e^{\left(t^2+2t\right)/2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{\left(t^2-2t\right)/2} \\ -2e^{\left(t^2-2t\right)/2} \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 2. *Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs donné par*

$$\mathbf{f}(x,y) = (2xy + y^2 - 1, 2xy + x^2).$$

oient les points $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$.
(1) Déterminer une paramétrisation du segment $[A, B]$.
(2) Calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long du segment de A vers B.
(3) Montrer que $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel h : déterminer un champs scalaire h tel que calculer $\nabla h = \mathbf{f}$.
(4) Calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long de la courbe Γ paramétrée par

$$\gamma(t) = (\cos^5(t), \sin^4(t)), \quad t = \pi/2 \to t = \pi.$$

Corrigé l'exercice 2. On paramètre le segment $[A, B]$ avec

$$\alpha(t) = (1-t, t), \; t = 0 \to t = 1$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\ell &= \int_0^1 \mathbf{f}(\alpha(t) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_0^1 (2(1-t)t + t^2 - 1, 2(1-t) + (1-t)^2) \cdot (-1,1) dt \\ &= 2\int_0^1 (1-t) dt = 1 \end{aligned}$$

Si $\mathbf{f}$ *dérive d'un potentiel* h*, i.e.* $\nabla h = \mathbf{f}$*, alors*

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} &= 2xy + y^2 - 1 && (1) \\ \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} &= 2xy + x^2 && (2) \end{aligned}$$

de (1) on déduit que

$$h(x,y) = x^2y + xy^2 - x + \varphi(y) \qquad (3)$$

En dérivant (3) par rapport à y *et en comparant avec (2), on obtient*

$$2xy + x^2 = x^2 + 2xy + \varphi'(y)$$

Donc $\varphi = c$ *une constante. Ainsi* $h(x,y) = x^2y + xy^2 - x + c$*.*

Notons que $\gamma(\pi/2) = (0,1) = B$ *et* $\gamma(\pi) = (-1,0) = C$*.*

La circulation d'un champ gradient ne dépend que des extrémités de la courbe sur laquelle elle circule, on a

$$\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\ell = h(C) - h(B) = -(-1) + k - 0 - k = 1$$

Exercice 3. Soit le champ $\mathbf{f}(x,y,z) = (y^2, -x^2, z)$ et Γ la courbe d'intersection du plan $y + z = 3$ avec le cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

(1) Soit S la surface délimitée par Γ.
Déterminer une paramétrisation de S.

(2) Calculer le vecteur normal à S.

(3) Calculer $\mathbf{rot}\,\mathbf{f}$.

(4) En utilisant le théorème de Stokes, calculer $\int_\Gamma \mathbf{f}$.

Corrigé l'exercice 3. Soit Γ la courbe d'intersection du plan $y + z = 3$ avec le cylindre $x^2 + y^2 = 1$; soit S la surface délimitée par Γ. Cette surface est paramétrée par

$$\begin{array}{rlcl} \alpha & : D =]0,2\pi[\times]0,1[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & (\theta,\rho) & \mapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 3 - \rho\sin\theta) \end{array}$$

La fonction α est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\theta} \wedge \dfrac{\partial\alpha}{\partial\rho} = (0, -\rho, -\rho)$.

Le champs $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{f} = -(0,0,2x+2y) = (0,0,2\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta)$$

Nous avons donc par le théorème de Stokes

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\alpha = \iint_S \mathbf{rot}\ \mathbf{f}\cdot dS &= \iint_D \mathbf{rot}\ \mathbf{f}(\alpha(\theta,\rho)) \cdot \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial\rho}\right) d\theta d\rho \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta)\rho\, d\theta d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\cos\theta}{3} + \frac{2\sin\theta}{3}\right) d\theta = 0. \end{aligned}$$