Mathématiques pour l'ingénieur
Examen du 16 Janvier 2023 – durée : 2h

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. On considère le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + e^t \\ y'(t) = x(t) - y(t) + e^t \end{cases} \qquad (*)$$

avec la condition initiale $x(0) = 1$, $y(0) = 1$. Sous forme matricielle ce système s'écrit $X'(t) = AX(t) + b(t)$, où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(2) Déterminer les solutions, notées $X_H(t)$, du système homogène $X'(t) = AX(t)$.

(3) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
Déterminer alors e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(4) En déduire une solution particulière $X_P(t)$ du système $(*)$.

(5) Déterminer alors $x(t)$ et $y(t)$ solutions du système $(*)$ vérifiant la condition initiale.

(6) On souhaite maintenant résoudre le système $(*)$ en utilisant la transformation de Laplace. On suppose que toutes les fonctions qui entrent en jeu sont causales et qu'elles possèdent une transformation de Laplace. On note $F(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$ et $G(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$.

Quel système obtient-on si on applique la transformation de Laplace au système différentiel $(*)$.

(7) En déduire que $F(s) = G(s) = \frac{1}{s-1}$.

(8) En inversant la transformation de Laplace, déterminer $x(t)$ et $y(t)$ solutions du système $(*)$ vérifiant la condition initiale.

Corrigé l'exercice 1. (1) On a $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+2)$. Le polynôme caractéristique étant scindé à racine simple, la matrice A est diagonalisable.

Après calcul, on trouve les sous-espaces propres $E_0(A) = \mathbb{R}v_1$ et $E_{-2}(A) = \mathbb{R}v_2$ où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Les solutions du système homogène sont donc

$$\begin{aligned} X_H(t) &= \alpha e^{0\times t} v_1 + \beta e^{-2\times t} v_2 \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + \beta e^{-2t} \\ \alpha - \beta e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(3) Da'près (1) On $A = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$ et

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2t} + 1 & -e^{-2t} + 1 \\ -e^{-2t} + 1 & e^{-2t} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5) La solution particulière du système $(*)$ est donnée par

$$X_P(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds$$

Or

$$e^{(t-s)A} b(s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2t+2s} + 1 & -e^{-2t+2s} + 1 \\ -e^{-2t+2s} + 1 & e^{-2t+2s} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ e^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^s \\ e^s \end{pmatrix}$$

donc

$$X_P(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds = \int_0^t \begin{pmatrix} e^s \\ e^s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ e^t - 1 \end{pmatrix}$$

(6) Finalement la solution générale est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) = X_H(t) + X_P(t) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta e^{-2t} + e^t - 1 \\ \alpha - \beta e^{-2t} + e^t - 1 \end{pmatrix}$$

Or $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$, donc $\alpha + \beta + 1 - 1 = 1$ et $\alpha - \beta + 1 - 1 = 1$ ce qui donne $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Ainsi

$$x(t) = y(t) = e^t.$$

(7) On a

$$\mathcal{L}(x')(s) = sF(s) - 1 \text{ et } \mathcal{L}(y')(s) = sG(s) - 1$$

Si on applique la transformée de Laplace au système différentiel, on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} sF(s) - 1 = -F(s) + G(s) + \frac{1}{s-1} \\ sG(s) - 1 = F(s) - G(s) + \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

On va résoudre ce système pour calculer $F(s)$ et $G(s)$. Il est équivalent à

$$\begin{cases} (s+1)F(s) - G(s) = \dfrac{1}{s-1} + 1 = \dfrac{s}{s-1} \\ -F(s) + (s+1)G(s) = \dfrac{1}{s-1} + 1 = \dfrac{s}{s-1}. \end{cases}$$

En faisant la différence des deux équations, on trouve que $F = G$, puis que

$$F(s) = G(s) = \frac{1}{s-1}.$$

(8) On en déduit, en inversant la transformée de Laplace, que

$$x(t) = y(t) = e^t.$$

Exercice 2. (1) Soit $g(x) = e^{-x^2}$ et $\hat{g}(\nu) = \mathcal{F}[g(x)](\nu)$ sa transformée de Fourier. En utilisant le fait que $g(x)$ (respectivement $\hat{g}(\nu)$) est solution d'une équation différentielle par rapport à x (respectivement ν), montrer que $\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right](\nu) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\nu^2}$. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

(2) Soit $f(x)$ une fonction solution de l'équation différentielle suivante

$$f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0 \qquad (**)$$

et soit $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)](\nu)$ sa transformée de Fourier.

(a) Que devient l'équation $(**)$ si on lui applique la transformée de Fourier ?

(b) En déduire $F(\nu)$.

(c) Trouver alors $f(x)$ en appliquant la transformée de Fourier inverse.

Corrigé l'exercice 2. (1) On a $g'(x) = -2xg(x)$. En appliquant la transformée de Fourier on a $\mathcal{F}\{g'(x)\}(\nu) = -2\mathcal{F}\{xg(x)\}(\nu)$, d'où $(2i\pi\nu)\hat{g}(\nu) = -2 \times \frac{1}{-2i\pi}\frac{d}{d\nu}\hat{g}(\nu)$. On a alors

$$\frac{d}{d\nu}\hat{g}(\nu) = -2\pi^2\nu\hat{g}(\nu)$$

ce qui conduit à la solution

$$\hat{g}(\nu) = Ke^{-\pi^2\nu^2}$$

La constante K est donnée par $K = \hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$. Ainsi

$$\mathcal{F}\{e^{-x^2}\}(\nu) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\nu^2}.$$

(2) (a) On transforme l'équation différentielle $(**)$ et on obtient

$$(2i\pi\nu)^2\mathcal{F}\{f\}(\nu) + \frac{1}{-2i\pi}\frac{d}{d\nu}\mathcal{F}\{f'\}(\nu) + \mathcal{F}\{f\}(\nu) = 0$$

et

$$(2i\pi\nu)^2\mathcal{F}\{f\}(\nu) + \frac{1}{-2i\pi}\frac{d}{d\nu}\left(2i\pi\nu\mathcal{F}\{f\}(\nu)\right) + \mathcal{F}\{f\}(\nu) = 0$$

donc

$$(2i\pi\nu)^2F(\nu) + \frac{1}{-2i\pi}\frac{d}{d\nu}\left(2i\pi\nu F(\nu)\right) + F(\nu) = 0$$

et

$$-4\pi^2\nu^2F(\nu) - \frac{d}{d\nu}\left(\nu F(\nu)\right) + F(\nu) = 0$$

$$4\pi^2\nu^2F(\nu) + \nu\frac{d}{d\nu}F(\nu) = 0$$

et pour $\nu \neq 0$

$$4\pi^2\nu F(\nu) + \frac{d}{d\nu}F(\nu) = 0$$

(b) La solution générale de cette équation est

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(\nu) = F(\nu) = Ke^{-2\pi^2\nu^2}$$

Cette fonction étant paire (par rapport à ν) on a

$$\begin{aligned} f(x) = \mathcal{F}\{Ke^{-2\pi^2\nu^2}\}(x) &= K\mathcal{F}\{e^{-\pi^2(\sqrt{2}\nu)^2}\}(x) \\ &= K\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}\{e^{-\pi^2\nu^2}\}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ &= K\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \ (voir\ (1)) \\ &= \frac{K}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi $f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ où C est une constante.

Quelques formules utiles ...

Transformée de Laplace

1. $\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$.
2. $\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
3. $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$.
4. $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$.
5. $\mathcal{L}[t^k f(t)](s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\mathcal{L}[f(t)](s)$.
6. $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$.

Transformée de Fourier

1. $\mathcal{F}[f(t)](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi t\nu}dt$.
2. $\mathcal{F}[f(at)](\nu) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(t)](\frac{\nu}{|a|})$.
3. $\mathcal{F}[f^{(k)}(t)](\nu) = (2i\pi\nu)^k\mathcal{F}[f(t)](\nu)$.
4. $\frac{d^k}{d\nu^k}\mathcal{F}[f(t)](\nu) = (-2i\pi)^k\mathcal{F}[t^k f(t)](\nu)$.
5. $\mathcal{F}[f \star g] = \mathcal{F}[f] \times \mathcal{F}[g]$.
6. (Formule d'inversion) Si la fonction $F(\nu) = \mathcal{F}[f(t)](\nu)$ est paire, alors $\mathcal{F}[F(t)](\nu) = f(\nu)$.