Examen du 20 Janvier 2022

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 2h.

Exercice 1. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x_1(t)' &= 4x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_2(t)' &= x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_3(t)' &= x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases} \tag{Σ}$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A du système (Σ), en déduire les valeurs propres de A.

(2) Déterminer les sous-espaces propres correspondants.

(3) Déduire l'ensemble des solutions du système (Σ).

Exercice 2. On cherche, en utilisant la transformée de Laplace, à résoudre l'équation différentielle

$$y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = t^2e^t \tag{E}$$

avec les conditions

$$y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2.$$

On pose $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$.

(1) Transformer l'équation (E) et déduire que $Y(s)$ vérifie une équation algébrique de la forme $f(s)Y(s) + g(s) = h(s)$ où $f(s)$, $g(s)$ et $h(s)$ sont à déterminer.

(2) En utilisant la transformée de Laplace inverse, déterminer alors une solution de l'équation (E).

Exercice 3. (1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-|x|}$.

(2) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto |x|e^{-|x|}$.

(3) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto (1 - |x|)e^{-|x|}$.

(4) Utiliser la formule d'inversion au résultat de la question (3) pour déterminer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$.

(5) On cherche, en utilisant la transformée de Fourier, à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 & (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} & x \in \mathbb{R} \\ u(x,y) \to 0 & y \to +\infty \end{cases} \tag{EDP}$$

où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|; y > 0\}$.

Soit $\widehat{u}(\nu, y)$ la transformée de Fourier de $u(x,y)$ par rapport à la variable x. Résoudre l'équation différentielle satisfaite par $\widehat{u}(\nu, y)$, en déduire une solution de (EDP).

.../...

Formulaire

Rappel de quelques formules ...

Transformée de Laplace

1. $\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$.
2. $\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
3. $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$.
4. $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$.
5. $\mathcal{L}[t^k f(t)](s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\mathcal{L}[f(t)](s)$.
6. $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$.

Transformée de Fourier

1. $\mathcal{F}[f(t)](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi t\nu}dt$.
2. $\mathcal{F}[f(at)](\nu) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(t)](\frac{\nu}{|a|})$.
3. $\mathcal{F}[f^{(k)}(t)](\nu) = (2i\pi\nu)^k\mathcal{F}[f(t)](\nu)$.
4. $\frac{d^k}{d\nu^k}\mathcal{F}[f(t)](\nu) = (-2i\pi)^k\mathcal{F}[t^k f(t)](\nu)$.
5. $\mathcal{F}[f \star g] = \mathcal{F}[f] \times \mathcal{F}[g]$.
6. (Formule d'inversion) Si la fonction $F(\nu) = \mathcal{F}[f(t)](\nu)$ est paire, alors $\mathcal{F}[F(t)](\nu) = f(\nu)$.