Examen du 20 Janvier 2022 – Corrigé
Documents et calculatrice non autorisés – durée 2h

Exercice 1. Soit le système différentiel

$$\left\{\begin{aligned} x_1(t)' &= 4x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_2(t)' &= x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_3(t)' &= x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) \end{aligned}\right. \qquad (\Sigma)$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A du système (Σ), en déduire les valeurs propres de A.
(2) Déterminer les sous-espaces propres correspondants.
(3) Déduire l'ensemble des solutions du système différentiel (Σ).

Corrigé l'exercice 1. (1) La matrice du système différentiel est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne son polynôme caractéristique

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_3) = (2-\lambda)(3-\lambda)^2$$

Donc 2 est une valeur propre simple et 3 est une valeur propre double.
(2) Un autre calcul simple donne les sous-espaces propres

$$\begin{aligned} E_A(2) &= \mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\,(v_1) \\ E_A(3) &= \mathrm{Ker}(A - 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\,(v_2, v_3)\,. \end{aligned}$$

où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est diagonalisable car $\dim E_A(2) + \dim E_A(3) = \dim \mathbb{R}^3$

(3) Une solution générale du système (Σ) est donnée par

$$X(t) = \alpha e^{2t} v_1 + \beta e^{3t} v_2 + \gamma e^{3t} v_3$$

pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, soit

$$X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} + \beta e^{3t} + \gamma e^{3t} \\ \alpha e^{2t} + \beta e^{3t} \\ \alpha e^{2t} + \gamma e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On cherche, en utilisant la transformée de Laplace, à résoudre l'équation différentielle

$$y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = t^2 e^t \qquad \text{(Equation 1)}$$

avec les conditions

$$y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2.$$

On pose $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$.
(1) Transformer l'Equation 1 et déduire que $Y(s)$ vérifie une équation algébrique de la forme $f(s)Y(s) + g(s) = h(s)$ où $f(s)$, $g(s)$ et $h(s)$ sont à déterminer.
(2) En utilisant la transformée de Laplace inverse, déterminer alors une solution de l'Equation 1.

Corrigé l'exercice 2. Soit $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$, alors l'equation différentielle se transforme sous la forme

$$\begin{aligned} &\left(s^3 Y - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0)\right) \\ &-3\left(s^2 Y - s y(0) - y'(0)\right) \\ &+3(sY - y(0)) \\ &-Y \\ &= \frac{2}{(s-1)^3} \end{aligned}$$

d'où en tenant compte des conditions $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2$,

$$\begin{aligned} \left(s^3 - 3s^2 + 3s - 1\right) Y(s) - s^2 + 3s - 1 &= \tfrac{2}{(s-1)^3} \\ (s-1)^3 Y(s) - s^2 + 3s - 1 &= \tfrac{2}{(\theta-1)^3} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^3 - 3s + 1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} \end{aligned}$$

Par inversion de la transformée de Laplace, on trouve

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}\right](t) \\ &= e^t - te^t - \frac{t^2e^t}{2!} + \frac{2t^5e^t}{5!} \\ &= e^t - te^t - \frac{t^2e^t}{2} + \frac{t^5e^t}{60} \end{aligned}$$

Exercice 3. (1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{|x|}$.

(2) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto |x|e^{|x|}$.

(3) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto (1-|x|)e^{|x|}$.

(4) Utiliser la transformé de Fourier inverse au résultat de la question (3) pour déterminer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$.

(5) On cherche, en utilisant la transformée de Fourier, à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 & (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} & x \in \mathbb{R} \\ u(x,y) \to 0 & y \to +\infty \end{cases} \qquad \text{(EDP)}$$

où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|; y > 0\}$.
Soit $\widehat{u}(\nu, y)$ la transformée de Fourier de $u(x,y)$ par rapport à la variable x. Résoudre l'équation différentielle satisfaite par $\widehat{u}(\nu, y)$, en déduire une solution de (EDP).

Corrigé l'exercice 3. (1) On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right](\nu) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}e^{-2i\pi x\nu}dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^x e^{-2i\pi x\nu}dx + \int_0^\infty e^{-x}e^{-2i\pi x\nu}dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{x(1-2i\pi\nu)}dx + \int_0^\infty e^{-(x+2i\pi\nu)}dx \\ &= \frac{1}{1-2i\pi\nu} + \frac{1}{1+2i\pi\nu} \\ &= \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2} \end{aligned}$$

(2) De même

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[|x|e^{-|x|}\right](\nu) &= \int_{\mathbb{R}} |x|e^{-|x|}e^{-2i\pi x\nu}dx \\ &= \int_{-\infty}^0 -xe^x e^{-2i\pi x\nu}dx + \int_0^\infty xe^{-x}e^{-2i\pi x\nu}dx \\ &= -\int_{-\infty}^0 xe^{x(1-2i\pi\nu)}dx + \int_0^\infty xe^{-(x+2i\pi\nu)}dx \end{aligned}$$

Avec une intégration par partie dans chacune des deux intégrales, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[|x|e^{-|x|}\right](\nu) &= \frac{1}{(1-2i\pi\nu)^2} + \frac{1}{(1+2i\pi\nu)^2} \\ &= \frac{2-8\pi^2\nu^2}{(1+4\pi^2\nu^2)^2} \end{aligned}$$

(3) On déduite des questions précédentes que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[(1-|x|)e^{-|x|}\right](\nu) &= \mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right](s) - \mathcal{F}\left[|x|e^{-|x|}\right](\nu) \\ &= \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2} - \frac{2-8\pi^2\nu^2}{(1+4\pi^2\nu^2)^2} \\ &= \frac{16\pi^2\nu^2}{(1+4\pi^2\nu^2)^2} \end{aligned}$$

(4) D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[(1-|x|)e^{-|x|}\right](\nu) &= \frac{16\pi^2\nu^2}{(1+4\pi^2\nu^2)^2} \\ &= 4\frac{(2\pi\nu)^2}{(1+(2\pi\nu)^2)^2} \end{aligned}$$

Comme cette fonction est paire, on a donc par inversion

$$\begin{aligned} (1-|\nu|)e^{|\nu|} &= 4\mathcal{F}\left[\frac{(2\pi x)^2}{(1+(2\pi x)^2)^2}\right](\nu) \\ &= 4\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right]\left(\frac{\nu}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{F}\left[\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right]\left(\frac{\nu}{2\pi}\right) = \frac{\pi}{2}(1-|\nu|)e^{|\nu|}$$

et par conséquent

$$\mathcal{F}\left[\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right](\nu)=\frac{\pi}{2}(1-|2\pi\nu|)e^{|2\pi\nu|}=\frac{\pi}{2}(1-2\pi|\nu|)e^{2\pi|\nu|}$$

(5) Transformons l'équation $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$,

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\right](\nu)+\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right](\nu)=0$$

donc

$$(2i\pi\nu)^2\mathcal{F}\left[u(x,y)\right](\nu)+\frac{d^2}{dy^2}\mathcal{F}\left[u(x,y)\right](\nu)=0$$

c-à-d.

$$\frac{d^2}{dy^2}\widehat{u}(\nu,y)-2\pi^2\nu^2\widehat{u}(\nu,y)=0$$

La solution générale de cette équation différentielle est donnée par

$$\widehat{u}(\nu,y)=Ke^{-2\pi y|\nu|}$$

où K est une constante par rapport à y. La valeur de K est donnée par

$$\begin{aligned}K=\widehat{u}(\nu,0)&=\mathcal{F}[u(x,0)](\nu)\\&=\mathcal{F}\left[\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right](\nu)\\&=\frac{\pi}{2}(1-2\pi|\nu|)e^{-2\pi|\nu|}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\nu,y)&=\frac{\pi}{2}(1-2\pi|\nu|)e^{-2\pi|\nu|}e^{-2\pi y|\nu|}\\&=\frac{\pi}{2}(1-2\pi|\nu|)e^{-2\pi(1+y)|\nu|}\end{aligned}$$

Cette fonction étant paire par rapport à ν, donc par inversion

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\mathcal{F}\left[\frac{\pi}{2}(1-2\pi|\nu|)e^{-2\pi|(1+y)\nu|}\right](x)\\&=\frac{\pi}{2}\left(\mathcal{F}\left[e^{-2\pi|(1+y)\nu|}\right](x)-\mathcal{F}\left[2\pi|\nu|e^{-2\pi(1+y)|\nu|}\right](x)\right)\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-2\pi|(1+y)\nu|}\right](x)&=\frac{1}{2\pi(1+y)}\mathcal{F}\left[e^{-|\nu|}\right]\left(\frac{x}{2\pi(1+y)}\right)\\&=\frac{1}{2\pi(1+y)}\times\frac{2}{1+4\pi^2\left(\frac{x}{2\pi(1+y)}\right)^2}\\&=\frac{1}{\pi}\frac{1+y}{(1+y)^2+x^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[2\pi|\nu|e^{-2\pi(1+y)|\nu|}\right](x)&=\frac{1}{1+y}\mathcal{F}\left[2\pi|(1+y)\nu|e^{-2\pi|(1+y)\nu|}\right](x)\\&=\frac{1}{2\pi(1+y)^2}\mathcal{F}\left[|\nu|e^{-|\nu|}\right]\left(\frac{x}{2\pi(1+y)}\right)\\&=\frac{1}{2\pi(1+y)^2}\times\frac{2-8\pi^2\left(\frac{x}{2\pi(1+y)}\right)^2}{\left(1+4\pi^2\left(\frac{x}{2\pi(1+y)}\right)^2\right)^2}\\&=\frac{1}{\pi}\frac{(1+y)^2-x^2}{((1+y)^2+x^2)^2}.\end{aligned}$$

On met les deux dernières expressions ensembles et on trouve

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\frac{y(1+y^2)+x^2(2+y)}{((1+y)^2+x^2)^2}.$$