Synthèse du chapitre 5
Séries de Fourier

Math pour Ingénieurs – S5/1A NRJ ; ISN

Octobre 2023

Le but

Développer une fonction f continue par morceaux et T-périodique sous la forme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \quad \text{dévp}^t \text{ réel}$$

ou sous-la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2in\pi}{T}x} \quad \text{dévp}^t \text{ complexe}$$

Les a_n et b_n sont appelés coefficients de Fourier de réels de f et les c_n sont appelés coefficients de Fourier complexes de f.

Calcul des coefficients de Fourier

Les coefficients réels de f :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx, \quad \forall n \geq 0 \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx, \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Les coefficients complexe de f :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-\frac{2in\pi}{T}}dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Remarques

- Si f est T périodique, on peut calculer les intégrales sur n'importe quel intervalle de longueur T.

Remarques

- Si f est T périodique, on peut calculer les intégrales sur n'importe quel intervalle de longueur T.
- On utilise plutôt a_n et b_n si f est a valeurs réelles, et c_n si f est a valeurs complexes.

Remarques

- Si f est T périodique, on peut calculer les intégrales sur n'importe quel intervalle de longueur T.
- On utilise plutôt a_n et b_n si f est a valeurs réelles, et c_n si f est a valeurs complexes.
- Si f est paire alors

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \times \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx, \quad \forall n \geq 0 \\ b_n &= 0, \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Remarques

- Si f est impaire alors

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad \forall n \geq 0 \\ b_n &= 2 \times \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx, \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Convergence

Théorème de Dirichlet - Convergence simple

Si f est T-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisée de f :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2in\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2in\pi x}{T}$$

$$= \begin{cases} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{en tout point } x \text{ où } f \text{ est discontinue} \\ f(x) & \text{en tout point } x \text{ où } f \text{ est continue} \end{cases}$$

Convergence

Théorème de Dirichlet - Convergence normale

Si f est T-périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement (donc uniformément) vers f.

Convergence

Formule de Parseval

Si f est T-périodique et continue par morceaux, alors la série de Fourier de f converge en norme quadratique vers f et on a la formule de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

Que faire en général dans les exercices

- Tracer le graphe de f sur plusieurs périodes,

Que faire en général dans les exercices

- Tracer le graphe de f sur plusieurs périodes,
- Déterminer la classe (= régularité) de f pour connaître la convergence de la série de Fourier

Que faire en général dans les exercices

- Tracer le graphe de f sur plusieurs périodes,
- Déterminer la classe (= régularité) de f pour connaître la convergence de la série de Fourier
- Calculer les coefficients de Fourier de f (a_n, b_n, c_n selon le contexte)

Que faire en général dans les exercices

- Tracer le graphe de f sur plusieurs périodes,
- Déterminer la classe (= régularité) de f pour connaître la convergence de la série de Fourier
- Calculer les coefficients de Fourier de f (a_n, b_n, c_n selon le contexte)
- Appliquer Parseval et/ou Dirichlet selon la classe de f

Exemple 1

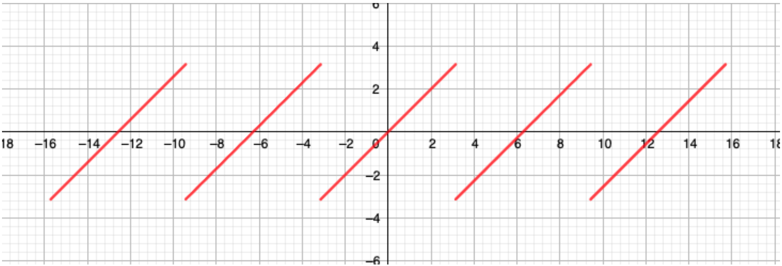
Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = x \quad \text{sur } [-\pi, \pi[$$

Exemple 1

Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = x \quad \text{sur } [-\pi, \pi[$$



La fonction f est définie par morceaux, ses points de discontinuités sont $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

cette fonction est impaire, donc $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$ et pour $n \geq 1$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin\frac{2n\pi x}{2\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

cette fonction est impaire, donc $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$ et pour $n \geq 1$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin\frac{2n\pi x}{2\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

La série de Fourier de f est

$$S_f = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx)$$

cette fonction est impaire, donc $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$ et pour $n \geq 1$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin\frac{2n\pi x}{2\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

La série de Fourier de f est

$$S_f = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx)$$

S_f ne converge pas uniformément vers f, mais simplement et on a, en tout point de continuité,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx) = f(x) = x$$

et en tout point de discontinuité

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{\pi-\pi}{2} = 0$$

Exemple 2

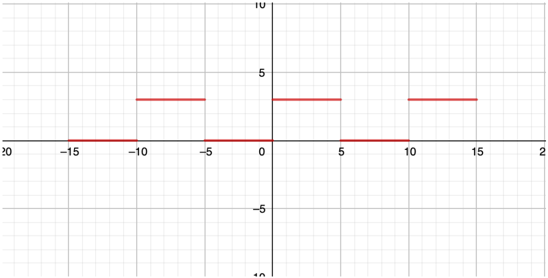
Donner le développement en série de Fourier de la fonction f, de période $T = 10$, définie sur $]-5;5[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in]-5;0[\\ 3, & \text{si } x \in]0;5[\end{cases}$$

Exemple 2

Donner le développement en série de Fourier de la fonction f, de période $T = 10$, définie sur $]-5;5[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in]-5;0[\\ 3, & \text{si } x \in]0;5[\end{cases}$$



f est continues par mauceaux, ses points de discontinuités sont $5k$, $k \in \mathbb{Z}$.

On a

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{10}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{10}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx \\
&= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0} 0\times\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_{0}^{5} 3\times\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} \\
&= \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\left[\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5 = 0 \;\text{ si }\; n\neq 0
\end{aligned}
$$

Si $n=0$, on a $a_0 = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{0\pi x}{5}\,dx = 3$

Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0} 0 \times \sin\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_{0}^{5} 3 \times \sin\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} \\
&= \frac{3}{5}\int_{0}^{5} \sin\frac{n\pi x}{5}\,dx \\
&= \frac{3}{5}\left[-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right]_{0}^{5} = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}
\end{aligned}$$

La série de Fourier est donc

$$
\begin{aligned}
& \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right) \\
= \quad & \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5}
\end{aligned}
$$

La série de Fourier est donc

$$
\begin{aligned}
& \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T}+b_n \sin \frac{2n\pi x}{T}\right) \\
= \quad & \frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5}
\end{aligned}
$$

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge vers $f(x)$ en tout point de continuité et vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ en tout point de discontinuité.

La série de Fourier est donc

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right) \\ = \quad & \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge vers $f(x)$ en tout point de continuité et vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ en tout point de discontinuité. En -5, 0 et 5, qui sont les point de discontinuité la série converge vers $(3+0)/2 = 3/2$. Par suite, la fonction limite simple sur $[-5, 5]$ est

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 3/2, & x = -5 \\ 0, & x \in]-5; 0[\\ 3/2, & x = 0 \\ 3, & x \in]0; 5[\\ 3/2, & x = 5 \end{cases}$$

Exemple 3

Soit f la fonction 2π-périodique, définie par

$$f(x) = x^2, \ \forall x \in [0, 2\pi[$$

Déterminons sa série de Fourier.

Exemple 3

Soit f la fonction 2π-périodique, définie par

$$f(x) = x^2, \ \forall x \in [0, 2\pi[$$

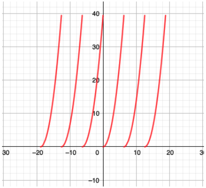
Déterminons sa série de Fourier.
Attention : ce n'est pas parce que la fonction est définie par x^2 sur $[0, 2\pi[$ qu'elle est paire.
Sa définition par 2π-périodicité fait que f n'est pas égale à x^2 sur un autre intervalle de longueur 2π, par exemple sur $[-2\pi, 0[$. En particulier on ne peut pas dire que les coefficient b_n sont nuls.
Pour s'en rendre compte il faut tracer sa courbe.

Exemple 3

Soit f la fonction 2π-périodique, définie par

$$f(x) = x^2, \ \forall x \in [0, 2\pi[$$

Déterminons sa série de Fourier.
Attention : ce n'est pas parce que la fonction est définie par x^2 sur $[0, 2\pi[$ qu'elle est paire.
Sa définition par 2π-périodicité fait que f n'est pas égale à x^2 sur un autre intervalle de longueur 2π, par exemple sur $[-2\pi, 0[$. En particulier on ne peut pas dire que les coefficient b_n sont nuls.
Pour s'en rendre compte il faut tracer sa courbe.



$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4}{n^2},\ n \geq 1 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin(nx) dx = -\frac{4\pi}{n},\ n \geq 1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3} \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4}{n^2},\ n \geq 1 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin(nx) dx = -\frac{4\pi}{n},\ n \geq 1 \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est donc

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx)$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4}{n^2},\ n \geq 1 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin(nx) dx = -\frac{4\pi}{n},\ n \geq 1
\end{aligned}
$$

La série de Fourier de f est donc

$$
\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx)
$$

D'après le théorème de Dirichlet,

$$
\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}
$$

Pour $x = 0$, on trouve

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^2} = \frac{(2\pi)^2 + 0}{2}$$

donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pour $x = 0$, on trouve

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^2} = \frac{(2\pi)^2 + 0}{2}$$

donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Le théorème de Parseval donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^4 dx = \frac{1}{4}\left(\frac{8\pi^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{16}{n^4} + \frac{16\pi^2}{n^2}$$

D'où

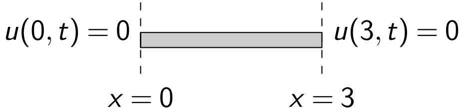
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Application des séries de Fourier aux problèmes de valeurs aux limites
Propagation de la chaleur dans une barre

Une barre de surface isolée, de longueur 3 (unités), est maintenue à une température constante de 25° (température initiale). On suppose que les extrémités $x = 0$ et $x = 3$ sont maintenues à la température constante de 0°. Trouver la température $u(x, t)$ en position x, à l'instant $t > 0$.

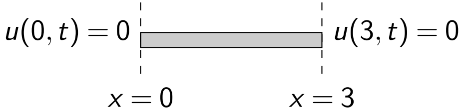
Application des séries de Fourier aux problèmes de valeurs aux limites
Propagation de la chaleur dans une barre

Une barre de surface isolée, de longueur 3 (unités), est maintenue à une température constante de 25° (température initiale). On suppose que les extrémités $x = 0$ et $x = 3$ sont maintenues à la température constante de 0°. Trouver la température $u(x,t)$ en position x, à l'instant $t > 0$.



Application des séries de Fourier aux problèmes de valeurs aux limites
Propagation de la chaleur dans une barre

Une barre de surface isolée, de longueur 3 (unités), est maintenue à une température constante de 25° (température initiale). On suppose que les extrémités $x = 0$ et $x = 3$ sont maintenues à la température constante de 0°. Trouver la température $u(x, t)$ en position x, à l'instant $t > 0$.



On est donc en présence du problème de valeurs aux limites suivant (équation de la chaleur) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \ 0 < x < 3$$
$$u(x, 0) = 25, \ \ u(0, t) = u(3, t) = 0.$$

1ère étape

On utilise la méthode de séparation des variables et on pose $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$. Alors l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ devient

$$\psi'(t)\varphi(x) = 2\psi(t)\varphi''(x)$$

1ère étape

On utilise la méthode de séparation des variables et on pose $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$. Alors l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ devient

$$\psi'(t)\varphi(x) = 2\psi(t)\varphi''(x)$$

On divise formellement par $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{2}\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}$$

1ère étape

On utilise la méthode de séparation des variables et on pose $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$. Alors l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ devient

$$\psi'(t)\varphi(x) = 2\psi(t)\varphi''(x)$$

On divise formellement par $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{2}\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}$$

Comme le membre de gauche ne dépends que de x et le membre de droite ne dépends que de t on en déduit qu'ils sont constants, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\psi'(t) = 2\lambda\psi(t)$$

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$$

On obtient alors deux équations différentielles.

2ème étape

On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda \varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(3) = 0 \end{cases}$$

Les solutions dépendent de la constantes λ.

2ème étape

On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda \varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(3) = 0 \end{cases}$$

Les solutions dépendent de la constantes λ.

– Si $\lambda > 0$ alors les solutions de l'équation différentielle sont

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Si on cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites, il vient

2ème étape

On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(3) = 0 \end{cases}$$

Les solutions dépendent de la constantes λ.

– Si $\lambda > 0$ alors les solutions de l'équation différentielle sont

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Si on cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 \quad &\Rightarrow A + B = 0 \\ \varphi(3) = 0 \quad &\Rightarrow A(e^{\sqrt{3\lambda}} - e^{3\sqrt{\lambda}}) = 0 \\ &\Rightarrow 2A\mathrm{sh}(2\sqrt{\lambda}) = 0 \\ &\Rightarrow A = B = 0 \end{aligned}$$

2ème étape

On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(3) = 0 \end{cases}$$

Les solutions dépendent de la constantes λ.

– Si $\lambda > 0$ alors les solutions de l'équation différentielle sont

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Si on cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 \quad &\Rightarrow A + B = 0 \\ \varphi(3) = 0 \quad &\Rightarrow A(e^{\sqrt{3\lambda}} - e^{3\sqrt{\lambda}}) = 0 \\ &\Rightarrow 2A\mathrm{sh}(2\sqrt{\lambda}) = 0 \\ &\Rightarrow A = B = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solutions non nulles dans ce cas.

– Si $\lambda = 0$ alors

$$\varphi(x) = Ax + B$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 \quad & \Rightarrow B = 0 \\ \varphi(3) = 0 \quad & \Rightarrow 3A = 0 \\ & \Rightarrow A = B = 0 \end{aligned}$$

– Si $\lambda = 0$ alors

$$\varphi(x) = Ax + B$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 \quad &\Rightarrow B = 0 \\ \varphi(3) = 0 \quad &\Rightarrow 3A = 0 \\ &\Rightarrow A = B = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solutions non nulles dans ce cas non plus.

– Si $\lambda = 0$ alors

$$\varphi(x) = Ax + B$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 \quad & \Rightarrow B = 0 \\ \varphi(3) = 0 \quad & \Rightarrow 3A = 0 \\ & \Rightarrow A = B = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solutions non nulles dans ce cas non plus.

– Si $\lambda < 0$, alors

$$\varphi(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 \quad & \Rightarrow B = 0 \\ \varphi(3) = 0 \quad & \Rightarrow A\sin(3\sqrt{-\lambda}) = 0 \\ & \Rightarrow \text{ou bien } A = 0 \text{ ou bien } 3\sqrt{-\lambda} = n\pi,\ n > 0 \text{ entier} \end{aligned}$$

Il existe donc des solutions non nulles dans ce cas qui sont

$$\varphi_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{3}x), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

associées aux valeurs de λ suivantes

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{9}.$$

Il existe donc des solutions non nulles dans ce cas qui sont

$$\varphi_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{3}x), \;\; n \in \mathbb{N}^*$$

associées aux valeurs de λ suivantes

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{9}.$$

Au total, on a obtenu une suite infinies de solutions associées chacune à une valeurs de λ. Les solutions φ_n sont les fonctions propres du problème et les λ_n les valeurs propres. Les fonctions propres (comme les vecteurs propres) sont définies à une constate près.

3ème étape

On remarque que le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^3 f(x)g(x)dx$$

orthogonalise la suite des φ_n, dans le sens où

3ème étape

On remarque que le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^3 f(x)g(x)dx$$

orthogonalise la suite des φ_n, dans le sens où

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0, \text{ pour } n \neq m$$

3ème étape

On remarque que le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^3 f(x)g(x)dx$$

orthogonalise la suite des φ_n, dans le sens où

$$\langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = 0, \text{ pour } n \neq m$$

ceci indique que la suite des φ_n est une base sur laquelle on va pouvoir développer la solution en la projetant grâce au produit scalaire.

4ème étape

On résout l'équation en $\phi(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale.

4ème étape

On résout l'équation en $\phi(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation

$$\psi_n'(t) = 2\lambda_n \psi(t)$$

qui a pour solutions

$$\psi_n(t) = \beta_n e^{2\lambda_n t} = \beta_n e^{-2\frac{n^2\pi^2}{9}t}$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiales à cette équation différentielle d'ordre 1 on trouve un espace vectoriel de dimension 1 de solutions. (β_n est une constante arbitraire pour le moment).

4ème étape

On résout l'équation en $\phi(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation

$$\psi_n'(t) = 2\lambda_n \psi(t)$$

qui a pour solutions

$$\psi_n(t) = \beta_n e^{2\lambda_n t} = \beta_n e^{-2\frac{n^2\pi^2}{9}t}$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiales à cette équation différentielle d'ordre 1 on trouve un espace vectoriel de dimension 1 de solutions. (β_n est une constante arbitraire pour le moment).
A ce stade, les fonctions

$$\psi_n(t)\varphi_n(x)$$

sont solutions de l'E.D.P. et des conditions aux limites mais pas de la condition initiale.

5ème étape

L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation. On écrit donc la solution $u(x,t)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\psi_n(t)\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n e^{-2\frac{n^2\pi^2}{9}t}\sin(\frac{n\pi}{3}x).$$

5ème étape

L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation. On écrit donc la solution $u(x,t)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n e^{-2\frac{n^2\pi^2}{9}t} \sin(\frac{n\pi}{3}x).$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients β_n pour que la solutions $u(x,t)$ vérifie la condition initiale. Cette condition s'écrit

$$u(x,0) = 25 \ \text{ pour } 0 < x < 3$$

ce qui donne

$$u(x,0) = 25 = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin(\frac{n\pi}{3}x), \ \ 0 < x < 3$$

5ème étape

L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation. On écrit donc la solution $u(x,t)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n e^{-2\frac{n^2\pi^2}{9}t} \sin(\frac{n\pi}{3}x).$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients β_n pour que la solutions $u(x,t)$ vérifie la condition initiale. Cette condition s'écrit

$$u(x,0) = 25 \;\text{ pour } 0 < x < 3$$

ce qui donne

$$u(x,0) = 25 = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin(\frac{n\pi}{3}x),\;\; 0 < x < 3$$

Ceci est le développement en série de Fourier de la fonction $f(x) = 25$ pour $0 < x < 3$ qu'on prolonge en une fonction impaire de période 6.

Donc

$$\beta_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin(\frac{n\pi}{3})dx = \frac{2}{3}\int_0^3 25\sin(\frac{n\pi}{3})dx = \frac{50(1-\cos n\pi)}{n\pi},$$

$$\beta_n = \frac{50(1-(-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \text{ pair} \\ \frac{100}{(2p+1)\pi} & \text{si } n = 2p+1 \text{ impair} \end{cases}$$

Donc

$$\beta_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin(\frac{n\pi}{3})dx = \frac{2}{3}\int_0^3 25\sin(\frac{n\pi}{3})dx = \frac{50(1-\cos n\pi)}{n\pi},$$

$$\beta_n = \frac{50(1-(-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \text{ pair} \\ \frac{100}{(2p+1)\pi} & \text{si } n = 2p+1 \text{ impair} \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{100}{(2p+1)\pi} e^{-2\frac{(2p+1)^2\pi^2}{9}t} \sin(\frac{(2p+1)\pi}{3}x) \\ &= \frac{100}{\pi}(e^{-2\pi^2 t/9} \sin\frac{\pi x}{3} + \frac{1}{3}e^{-2\pi^2 t}\sin \pi x + \cdots) \end{aligned}$$