Chapitre 2
Partie 3 : Théorèmes de Green, Stokes et d'Ostrogradski

Math pour Ingénieurs – S5/1A NRJ ; ISN

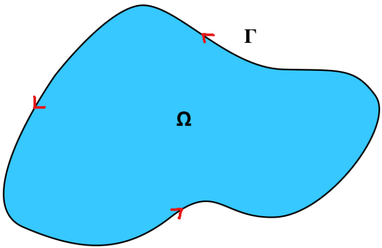
29 septembre 2023

Le théorème de Green

Le théorème de Green (ou Green-Reimann) donne la relation entre une intégrale curviligne le long d'une courbe simple fermée orientée $\mathscr{C}^1$ par morceaux et l'intégrale double sur la région du plan délimitée par cette courbe.

Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier et $\partial\Omega = \Gamma$ son bord, qui est courbe fermée dans $\mathbb{R}^2$ (courbe de Jordan).

La bord Γ est orienté positivement : le sens de parcours laisse le domaine Ω à gauche.



Le théorème de Green

Théorème (de Green)

Soit $\mathbf{f} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ *un champ vectoriel de classe* $\mathscr{C}^1$. *Alors,*

$$\iint_{\Omega} \mathbf{rot}(\mathbf{f})(x,y)dxdy = \int_{\Gamma^+} \mathbf{f} \cdot d\ell$$

c-à-d.

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\Gamma^+} \Big(Pdx + Qdy \Big),$$

Exemple 1

♠1 Vérifions le théorème de Green pour le champ vectoriel $\mathbf{f}(x,y) = (y^2, x)$ défini sur le domaine

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\} \quad \text{disque unité}$$

Son bord est

$$\Gamma = \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{cercle unité}$$

- Une paramétrisation de Ω est $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, $r \in (0,1)$ et $\theta \in (0,2\pi)$. On vérifie facilement que

$$\textbf{rot}(\mathbf{f}) = \frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial y} = 1 - 2y$$

$$\iint_\Omega \textbf{rotf}(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - 2r\cos\theta) rdrd\theta = \pi$$

- Une paramétrisation du cercle unité (orienté dans le sens positif) Γ est $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta : 0 \to 2\pi$ Donc

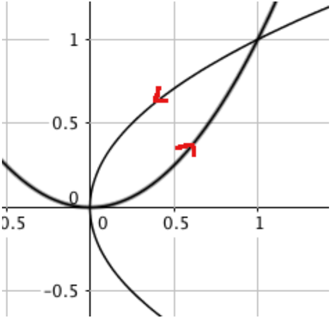
$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta, \cos\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Exemple 2

♠1 En utilisant la formule de Green, évaluons l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy,$$

où Γ est le bord orienté du domaine délimité par les courbes $y = x^2$ et $x = y^2$.



Le domaine correspondant à pour paramétrage

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

On pose $P(x,y) = 2xy - x^2$ et $Q(x,y) = x + y^2$. Donc

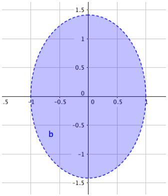
$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy \quad &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dydx \\
&= \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx \\
&= \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

Exemple 3

♠1 Evaluons l'intégrale double suivante, en utilisant la formule de Green,

$$\iint_{\Omega} (2x^3 - y)dxdy$$

où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.



On commence par chercher P et Q tels que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x^3, \ \ \frac{\partial P}{\partial y} = y$$

On trouve $Q(x,y) = x^4/2$ et $P(x,y) = y^2/2$.
Le domaine Ω est l'intérieur d'une ellipse paramétrée par
$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta,\ \theta \in (0,\pi/2)$ Donc

$$\begin{aligned} \textstyle\iint_\Omega (2x^3 - y)dxdy &= \textstyle\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy \\ &= \textstyle\int_0^{2\pi} \frac{b^2\sin^2\theta}{2} \times (-a\sin\theta) + \frac{b^4\cos^4\theta}{2} \times (b\cos\theta)d\theta \\ &= \textstyle\frac{4}{15}a^4 b - \frac{ab^2}{3} \end{aligned}$$

L'aire comme intégrale de surface

Soit Ω un domaine délimité par une courbe Γ. L'**aire** de Ω est définie par

$$\mathrm{Aire}(\Omega) = \iint_\Omega dxdy.$$

Considérons dans un premier temps $P(x,y) = y$ et $Q(x,y) = 0$. Alors, la formule de Green donne :

$$\iint_\Omega dxdy = -\int_{\Gamma^+} ydx,$$

De la même façon, considérons $P(x,y) = 0$ et $Q(x,y) = x$, alors

$$\iint_\Omega dxdy = \int_{\Gamma^+} xdy.$$

Donc

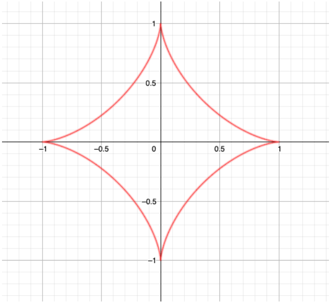
$$2\iint_{\Omega} dxdy = \int_{\Gamma^+} xdy - \int_{\Gamma^+} ydx$$

Par conséquent, l'aire de Ω se calcule de la façon suivante :

$$\boxed{\text{aire}(\Omega) = \iint_{\Omega} dxdy = \frac{1}{2}\int_{\Gamma^+} xdy - ydx}$$

Aire de l'astroïde

♠1 Calculons l'aire de l'astroïde délimité par les axe (Ox), (Oy) et la courbe paramétrée $\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.



Si Γ est le bord orienté du domaine, on a

$$A = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx$$

On calcule ensuite l'intégrale d'une 1-forme différentielle de la façon habituelle :

$$x = a\cos^3(t) \to dx = -3a\sin(t)\cos^2(t)dt$$

$$y = a\sin^3 t \to dx = 3a\cos(t)\sin^2(t)dt$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos^3 t(3a\cos t\sin^2 t) - a\sin^3 t(-3a\sin t\cos^2 t)dt \\
&= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 tdt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 tdt \\
&= \frac{3}{8}\pi a^2
\end{aligned}$$

Formule de changements de variables

En dimension 1, on a la formule de changement de variable avec $x = g(t)$ et g bijection C^1 de $[c, d]$ sur $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt.$$

Comment cela se passe-t-il en dimensions supérieures ?

Formule de changements de variables en dimension 2

Soit S et T deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi\colon S \to T$ une application bijective de classe C^1. On notera

$$\varphi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v)).$$

On a alors la formule :

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_T g(u,v)|J(u,v)|dudv$$

avec $g(u,v) = f \circ \varphi(u,v)$ et

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \partial_u X & \partial_v X \\ \partial_u Y & \partial_v Y \end{vmatrix}.$$

Exemple de changement de coordonnées

Montrer que l'on a en coordonnées polaires

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_T f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta,$$

où S est le disque de centre l'origine et de rayon a, T est à déterminer.

En dimension supérieure à trois

On considère application vectorielle $\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : T &\to S, \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Supposons $\mathbf{X}$ bijective et continûment différentiable sur T. La formule de changements de coordonnées s'écrit alors

$$\int_S f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_T f(\mathbf{X}(\mathbf{u})) |\mathbf{det} D\mathbf{X}(\mathbf{u})| d\mathbf{u}$$

où $D\mathbf{X}(\mathbf{u})$ est la matrice jacobienne du champ de vecteurs $\mathbf{X}$.

Exemple de la dimension 3

Dans le cas tridimensionnel, posons $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$ et $\mathbf{u} = (u, v, w)$ comme notations ($\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{u})$).

On a alors $\iiint_S f(x, y, z) dxdydz =$

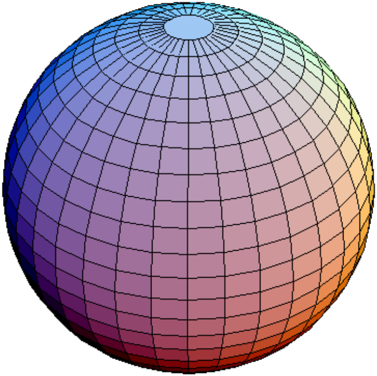
$$\iiint_T f(X(u,v,w), Y(u,v,w), Z(u,v,w)) |\mathbf{det} J(u,v,w)| dudvdw$$

où

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \partial_u X & \partial_v X & \partial_w X \\ \partial_u Y & \partial_v Y & \partial_w Y \\ \partial_u Z & \partial_v Z & \partial_w Z \end{vmatrix}$$

Surfaces

Une surface est l'analogue en dimension 2 de ce qu'est une courbe en dimension 1, c'est-à-dire un objet décrit localement par deux paramètres.



Surfaces paramétrées

Une **surface paramétrée** $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est un couple (U, σ) où U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$, et

$$\sigma : \bar{U} \to \Sigma,\ \sigma(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$$

est un champ vectoriel de U dans $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$.
On dira que σ est une paramétrisation de Σ.
Le **vecteur normal** à Σ au point $\sigma(u,v)$ est

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}$$

Deux exemples

Exemple

La sphère centrée en l'origine et de rayon a est décrite par la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos\theta\cos\varphi \\ y = a\sin\theta\cos\varphi \\ z = a\sin\varphi \end{array}\right. \quad (\theta,\varphi) \in U = [0;2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

Exemple

Le cône de hauteur $h\cos\gamma$ est décrit par

$$\left\{\begin{array}{l} x = v\sin\gamma\cos u \\ y = v\sin\gamma\sin u \\ z = v\cos\gamma \end{array}\right. \quad (u,v) \in U = [0;2\pi] \times [0;h]$$

Plan tangent

Définition

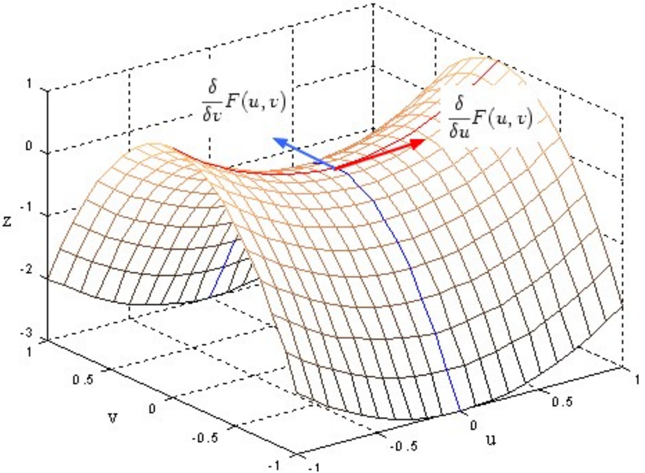
On dira que le point $\sigma(u,v)$ de la surface paramétrée Σ est **régulier** si, en ce point,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \neq \mathbf{0}$$

Dans le cas contraire, on parle de **point singulier**. Si tous les points sont réguliers, la surface est dite **régulière**.

En un point régulier, les vecteurs $\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \sigma}{\partial v}$ sont linéairement indépendants, et engendrent donc un plan. Le plan affine contenant le point $M = \sigma(u,v)$ et les deux directions $\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \sigma}{\partial v}$ est appelé **plan tangent** en M à la surface Σ.

Un exemple


$\frac{\delta}{\delta v}F(u,v)$
$\frac{\delta}{\delta u}F(u,v)$
z
1
0
-1
-2
-3
v
1
0.5
0
-0.5
-1
u
-1
-0.5
0
0.5
1

Aire d'une surface dans $\mathbb{R}^3$

On considère une surface Σ paramétrée par (σ, U).

Définition

L'**aire** de Σ, notée $a(\Sigma)$ ou $|\Sigma|$, est définie par l'intégrale double

$$a(\Sigma) = \iint_U \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\ dv$$

Exemple

♠1 Calculons l'aire de la surface (de la sphère)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

On choisit une paramétrisation (en coordonnées sphérique)

$$\alpha(\theta,\varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

avec $(\theta,\varphi) \in U := [0,2\pi]\times[0,\pi]$.
Le vecteur normal est

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} = -(r^2\sin\varphi\cos\theta\sin\varphi, r^2\sin\varphi\sin\theta\sin\varphi, r^2\sin\varphi\cos\varphi)$$

et donc $\|\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\| = r^2\sin\varphi$. L'aire de Σ est donc

$$\mathrm{a}(\Sigma) = \iint_U \|\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\| d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\sin\varphi d\theta d\varphi = 4\pi r^2.$$

Intégrales de surfaces

Définition

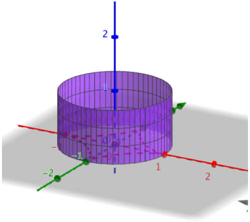
Soit $\Sigma = \sigma(U)$ une surface paramétrée décrite par une fonction différentiable α définie sur une région U du plan (u, v) et soit f un **champ scalaire** défini et borné sur Σ. L'**intégrale de surface** de f sur Σ est définie par l'équation :

$$\iint_{\Sigma} f ds = \iint_{U} f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du \; dv$$

Exemple

♠1 Calculons l'intégrale de surface du **champ scalaire** $\mathbf{f}(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z$ sur la surface

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1 \ \text{ et } \ 0 \leq z \leq 1\}$$



On choisi le paramétrage

$$\sigma(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

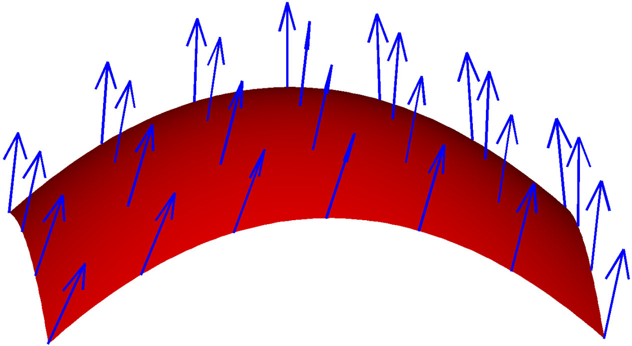
avec $(\theta, z) \in U := [0, 2\pi] \times [0, 1]$.
on trouve

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial z} = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \ \ \| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial z} \| = 1$$

Donc

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{f}\, ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2z) d\theta dz = 2\pi \int_0^1 (1 + 2z) dz = 4\pi$$

Flux d'un champ à travers une surface



Flux d'un champ à travers une surface

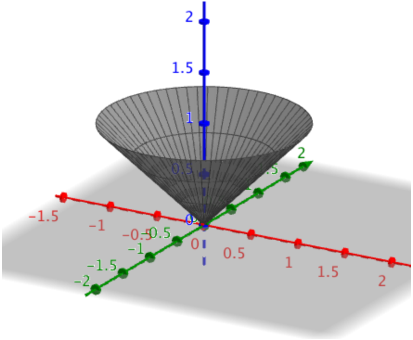
On appelle flux d'un **champ de vecteurs F** de $\mathbb{R}^3$ à travers une surface orientée $\Sigma = (U, \sigma)$ le scalaire

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot ds = \iint_{U} \mathbf{F}\left[\sigma\left(u, v\right)\right] \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} du \ dv$$

Exemple

♠1 Soit le champ vectoriel $\mathbf{f}(x,y,z) = (y,-x,z^2)$ et la surface

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 = x^2 + y^2 \ \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$$



Calculons le flux de $\mathbf{f}$ passant à travers Σ dans la direction des $z > 0$.

On choisi la paramétrisation

$$\sigma(\theta,z)=(z\cos\theta,z\sin\theta,z)$$

avec $(\theta,z)\in U:=[0,2\pi]\times[0,1]$. On obtient

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial z}=(z\cos\theta,z\sin\theta,-z)$$

Cette normale pointe vers $z<0$, et comme on cherche le flux de $\mathbf{f}$ passant à travers Σ dans la direction des $z>0$, il faut prendre comme normale $\mathbf{n}=-(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial z})$. On obtient

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \mathbf{f}\cdot\mathbf{d}s &= -\int_0^1\int_0^{2\pi}(z\sin\theta,-z\cos\theta,z^2)\cdot(z\cos\theta,z\sin\theta,-z)dzd\theta\\ &= -\int_0^1\int_0^{2\pi}(z^2\cos\theta\sin\theta-z^2\cos\theta\sin\theta-z^3)dzd\theta\\ &= 2\pi\int_0^1 z^3dz=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Théorème de Stokes

Ce théorème affirme que la circulation d'un champ vectoriel $\mathbf{f}$ le long du bord orienté d'une surface Σ est égale au flux du rotationnel de $\mathbf{f}$ à travers cette surface Σ.

Théorème

On suppose que Σ est une surface paramétrique, de bord C fermé. On suppose que $\Sigma = \sigma(U)$ et $C = \sigma(\partial U)$, où

- *U est une région dans le plan (u, v) bornée par une courbe de Jordan ∂U régulière par morceaux,*
- *σ est de classe $\mathscr{C}^2$.*

Soit ensuite un champ de vecteur $\mathbf{f}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur Σ. Alors nous avons

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{rot}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{d}s = \oint_{C^+} \mathbf{f} \cdot d\ell \qquad (1)$$

Exemple

♠1 Vérifions le théorème de Stoes pour $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, x, y)$ et Σ le cône

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 = x^2 + y^2,\, 0 < z < 1\}$$

- Calculons $\iint_\Sigma \mathbf{f} \cdot \mathbf{d}s$ On a

$$\mathbf{rotf} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = (1,1,1)$$

On paramètre Σ par
$\sigma(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)$ avec $(\theta, z) \in U = (0, 2\pi) \times (0,1)$
et donc une normale est $\frac{\partial\sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y} = (z\cos\theta, z\sin\theta, -z)$. On déduit donc

$$\iint_\Sigma \mathbf{f} \cdot ds = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1,1,1) \cdot (z\cos\theta, z\sin\theta, -z) dz d\theta = -\pi$$

- Calculons $\int_{\partial\Sigma} \mathbf{f} \cdot dl$.
  Le bord $C = \partial\Sigma$ de la surface Σ est

$$C = \{(\cos\theta, \sin\theta, 1) \ : \ \theta : 2\pi \to 0\}$$

  cercle unité orienté dans le sens négatif (pour que Σ reste à gauche de C) paramétré par $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$. Donc

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma} \mathbf{f} \cdot dl \quad &= -\int_0^{2\pi} (1, \cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0) d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \\ &= -\pi\end{aligned}$$

Exemple rapide

♠1 Calculons $\iint_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{f} \cdot ds$ où $\mathbf{f}(x,y,z) = (xz, yz, xy)$ et Σ est la portion de la sphère $x^2+y^2+z^2=9$ qui se trouve à l'intérieur du cylindre $x^2+y^2=1$ et au-dessus du plan Oxy.

A l'intersection de la sphère et du cylindre, on a $z^2 = 8$ donc $z = 2\sqrt{2}$ car $z > 0$.
La surface Σ s'appuie donc sur le contour C décrit par les équations

$$x^2 + y^2 = 1, \;\; z = 2\sqrt{2}$$

Une paramétrisation de C est donc donnée par

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2\sqrt{2}), \;\; t \in (0, 2\pi)$$

Donc $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ et
$\mathbf{f}(\gamma(t)) = (2\sqrt{2}\cos t, 2\sqrt{2}\sin t, \cos t \sin t)$. Donc d'après la formule de Stokes

$$\iint_\Sigma \mathbf{rotf} \cdot ds = \int_C \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$$

Théorème d'Ostrogradski ou de la divergence

Ce théorème affirme que le flux d'un champ vectoriel **f** sortant à travers une surface fermée Σ est égale à l'intégrale de la divergence de **f** dans le volume délimité par la surface.

Théorème (Green-Ostrogradski)

Soit V, un solide de $\mathbb{R}^3$ borné par une surface fermée orientable Σ.Si $\mathbf{f}$ est un champ de vecteurs continument différentiable défini sur V, nous avons

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{f}\ dxdydz = \iint_\Sigma \mathbf{f}\cdot ds$$

avec $\operatorname{div}\mathbf{f} = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3$.

Exemple

♠1 Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs $\mathbf{f}(x,y,z) = (2xy^2 - y, 2x^2y - x, 0)$ et soit D le cube de $\mathbb{R}^3$ de cotés $[0,1]$ orienté par les vecteurs normaux sortant du cube. Calculons le flox de $\mathbf{f}$ à travers la surface $S = \partial D$.

On a $\operatorname{div}\mathbf{f} = 2x^2 + 2y^2$ et le théorème d'Ostrogradsky donne

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot ds &= \iiint_D \operatorname{div}(\mathbf{f}) dxdydz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x^2 + 2y^2) dxdydz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (2x^2 + 2y^2)[z]_{z=0}^{z=1} dxdy \\
&= \int_0^1 [2x^2 y + \frac{2}{3} y^3]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 (2x^2 + \frac{2}{3}) dx = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Exercice tiré de l'examen de Janvier 2017

♠1 Soit D le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par les trois surfaces d'équations

$$x^2+y^2=1, \ \ z=0 \text{ et } x+z=1.$$

Soit S le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur. Notons S_1 la partie de S contenue dans la surface $x+z=1$, elle est donc paramétrée par $x(r,\theta)=r\cos\theta$, $y(r,\theta)=r\sin\theta$ et $z(r,\theta)=1-r\cos\theta$ avec $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$.
Notons aussi S_2 la partie contenue dans la surface $z=0$, elle est donc paramétrée par $x(r,\theta)=r\cos\theta$, $y(r,\theta)=r\sin\theta$ et $z(r,\theta)=0$ avec $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]$.
Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs donné par $\mathbf{f}(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$.
(a) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_1.
(b) Calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_2.

(c) Calculer le flux de **f** à travers S en utilisante la formule d'Ostrogradsky (théorème de divergence). Calculer d'abord la divergence de **f**.

(d) Calculer l'aire de S_1.

(e) Soit C l'intersection de des surfaces $x^2 + y^2 = 1$ et $x + z = 1$. En utilisant la formule de Stokes, calculer la circulation de **f** le long de la courbe C, orientée dans le sens trigonométrique, vue d'en haut.

Corrigé.

(a) On considère le paramétrage de la surface S_1 donné dans l'énoncé $\alpha(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - r\cos\theta$ avec $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$. Le vecteur normal est donc

$$\mathbf{n} = \frac{\partial\alpha}{\partial r} \wedge \frac{\partial\alpha}{\theta r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

On a aussi

$$\mathbf{f}(\alpha(r,\theta)) \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 + r(\cos\theta + \sin\theta) \\ 1 - 2r\cos\theta \\ r(\cos\theta - \sin\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = r(-1 + 2r\cos\theta)$$

Le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_1 orientée vers le haut est donc égal à

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds &= \iint_{[0,1) \times [0,2\pi]} \mathbf{f}(\alpha(r,\theta)) \cdot \mathbf{n} dr d\theta \\ &= \iint_{[0,1) \times [0,2\pi]} r(-1 + 2r\cos\theta) dr d\theta \\ &= \boxed{-\pi}. \end{aligned}$$

Corrigé.

(b) Même raisonnement qu'en (a). Dans ce cas $\alpha(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ avec $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$. Donc

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds &= \iint_{[0,1) \times [0,2\pi]} \mathbf{f}(\alpha(r,\theta)) \cdot \mathbf{n} dr d\theta \\ &= \iint_{[0,1) \times [0,2\pi]} r^2(\cos\theta - \sin\theta) dr d\theta \\ &= \boxed{0}. \end{aligned}$$

(c) La divergence de $\mathbf{f}$ est

$$\mathbf{Div}(\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial x}(y-z) + \frac{\partial}{\partial y}(z-x) + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) = 0$$

D'après le théorème de la divergence (formule d'Ostrogradsky) le flux de $\mathbf{f}$ à travers S vaut $\iiint_D \mathbf{Div}(\mathbf{f}) = \boxed{0}$.

Corrigé.

(d) D'après les notation de (a) le volume l'aire de S_1 est égal à

$$\mathrm{Aire}(S_1) := \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} \|\frac{\partial\alpha}{\partial r} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\| dr d\theta$$

avec $\frac{\partial\alpha}{\partial r} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} = (r, 0, r)$ et $\|\frac{\partial\alpha}{\partial r} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\| = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r$, soit

$$\mathrm{Aire}(S_1) := \sqrt{2} \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} r dr d\theta = \boxed{\sqrt{2}\pi}$$

Corrigé.

(e) D'après le théorème de Stokes, la circulation de $\mathbf{f}$ le long de C orientée comme dans l'énoncé est égal au flux de $\mathbf{rot}(\mathbf{f})$ à travers S_1, orientée vers le haut. On pose $P(x,y,z) = y - z$, $Q(x,y,z) = z - x$ et $R(x,y,z) = x - y$), soit

$$\mathbf{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

On a

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(x-y) - \frac{\partial}{\partial z}(z-x) = -2$$

et par symétrie,

$$\mathbf{rot}(\mathbf{f}) = (-2,-2,-2)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{f} \cdot d\alpha &= \iint_{S_1} \mathbf{rot}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} ds \\
&= \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} (-2,-2,-2)\cdot(r,0,r) dr d\theta \\
&= \iint_{[0,1)\times[0,2\pi]} -4r dr d\theta \\
&= \boxed{-4\pi}
\end{aligned}$$