Chapitre 4
Transformation de Laplace

Math pour Ingénieurs – S5/1A NRJ ; ISN

Octobre 2023

Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil qui permet de simplifier la résolution d'équations différentielles, équations aux dérivées partielles, equations de différences, ...

Intégrale de Laplace

La variable t, dans tout ce qui suit, sera réelle, et on la supposera positive (elle représentera souvent le temps).

Intégrale de Laplace

La variable t, dans tout ce qui suit, sera réelle, et on la supposera positive (elle représentera souvent le temps).
On fait correspondre à une fonction f de la variable t, une fonction $\mathscr{L}\{f\}$ d'une nouvelle variable complexe s par la formule

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \qquad (1)$$

Intégrale de Laplace

La variable t, dans tout ce qui suit, sera réelle, et on la supposera positive (elle représentera souvent le temps).
On fait correspondre à une fonction f de la variable t, une fonction $\mathscr{L}\{f\}$ d'une nouvelle variable complexe s par la formule

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{1}$$

Si l'intégrale précédente est définie, $\mathscr{L}\{f\}$ s'appelle la **transformée de Laplace** de f.
Pour simplifier la théorie, nous nous limiterons à la transformation de Laplace réelle (de variable s réelle).

Hypothèses sur f

On ne peut pas calculer la transformée de Laplace de n'importe quelle fonction f.

Hypothèses sur f

On ne peut pas calculer la transformée de Laplace de n'importe quelle fonction f.
On supposera que

1. f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ (c'est une convention, dont l'utilité apparaîtra plus tard), une telle fonction est appelée **causale**,

Hypothèses sur f

On ne peut pas calculer la transformée de Laplace de n'importe quelle fonction f.

On supposera que

1. f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ (c'est une convention, dont l'utilité apparaîtra plus tard), une telle fonction est appelée **causale**,

Hypothèses sur f

On ne peut pas calculer la transformée de Laplace de n'importe quelle fonction f.
On supposera que

1. f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ (c'est une convention, dont l'utilité apparaîtra plus tard), une telle fonction est appelée **causale**,
2. f est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$,

Hypothèses sur f

On ne peut pas calculer la transformée de Laplace de n'importe quelle fonction f.
On supposera que

1. f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ (c'est une convention, dont l'utilité apparaîtra plus tard), une telle fonction est appelée **causale**,
2. f est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$,

Hypothèses sur f

On ne peut pas calculer la transformée de Laplace de n'importe quelle fonction f.
On supposera que

1. f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ (c'est une convention, dont l'utilité apparaîtra plus tard), une telle fonction est appelée **causale**,
2. f est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$,
3. f est d'ordre exponentielle : $\exists M \geq 0$, $\exists C \geq 0$

$$|f(t)| \leqslant Ce^{Mt}, \qquad \text{pour tout } t \geq t_0$$

Exemples

- Calculons $\mathscr{L}\{H(t)\}$ où

$$\text{échelon de Heaviside} \quad H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{H(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} H(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} e^{-st} dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-sx}}{s} \\
&= \frac{1}{s} \quad \text{si} \quad \Re(s) > 0
\end{aligned}$$

Exemples

- Calculons $\mathscr{L}\{1\}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{1\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \times 1 dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} e^{-st} dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-sx}}{s} \\
&= \frac{1}{s} \quad \text{si} \quad \Re(s) > 0
\end{aligned}$$

Exemples

- Calculons $\mathscr{L}\{1\}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{1\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \times 1 dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-st} dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-sx}}{s} \\
&= \frac{1}{s} \quad \text{si} \quad \Re(s) > 0
\end{aligned}$$

- Calculons $\mathscr{L}\{t\}$.

Exemples

- Calculons $\mathscr{L}\{1\}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{1\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \times 1 dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} e^{-st} dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-sx}}{s} \\
&= \frac{1}{s} \quad \text{si} \quad \Re(s) > 0
\end{aligned}$$

- Calculons $\mathscr{L}\{t\}$.

Exemples

- Calculons $\mathscr{L}\{1\}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{1\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \times 1 dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} e^{-st} dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-sx}}{s} \\
&= \frac{1}{s} \quad \text{si} \quad \Re(s) > 0
\end{aligned}$$

- Calculons $\mathscr{L}\{t\}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{t\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} t e^{-st} dt \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left[t \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right) - \left(\frac{e^{-st}}{s^2} \right) \right]_{t=0}^{t=x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sx}}{s^2} - \frac{x e^{-sx}}{s} \right) = \frac{1}{s^2} \quad \text{si} \quad \Re(s) > 0
\end{aligned}$$

Exemples

- Calculons $\mathscr{L}\{e^{at}\}$. On a

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{e^{at}\}(s) &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-(s-a)t}dt \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-(s-a)x}}{s-a} \\
&= \frac{1}{s-a} \quad \text{si} \quad \Re(s) > a
\end{aligned}
$$

Exemples

On montre aussi que :

- $$\mathscr{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \ \Re(s) > 0$$

Exemples

On montre aussi que :

- $$\mathscr{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \ \Re(s) > 0$$
- $$\mathscr{L}\{\sin at\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \ \Re(s) > 0$$

Exemples

On montre aussi que :

- $$\mathscr{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \ \Re(s) > 0$$
- $$\mathscr{L}\{\sin at\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \ \Re(s) > 0$$
- $$\mathscr{L}\{\cos at\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \ \Re(s) > 0$$

Exemples

On montre aussi que :

- $$\mathscr{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \ \Re(s) > 0$$
- $$\mathscr{L}\{\sin at\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \ \Re(s) > 0$$
- $$\mathscr{L}\{\cos at\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \ \Re(s) > 0$$
- $$\mathscr{L}\{\mathrm{sh} at\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}, \ \Re(s) > |a|$$

Exemples

On montre aussi que :

- $$\mathscr{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \;\; \Re(s) > 0$$
- $$\mathscr{L}\{\sin at\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \;\; \Re(s) > 0$$
- $$\mathscr{L}\{\cos at\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \;\; \Re(s) > 0$$
- $$\mathscr{L}\{\mathrm{sh} at\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}, \;\; \Re(s) > |a|$$
- $$\mathscr{L}\{\mathrm{ch} at\}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}, \;\; \Re(s) > |a|$$

Propriétés

Linéarité

$$\mathscr{L}\left\{\alpha f(t)+\beta g(t)\right\}(s)=\alpha\mathscr{L}\{f(t)\}(s)+\beta\mathscr{L}\{g(t)\}(s)$$

Propriétés

Linéarité

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}(s)=\alpha\mathscr{L}\{f(t)\}(s)+\beta\mathscr{L}\{g(t)\}(s)$$

Propriétés

Linéarité

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}(s)=\alpha\mathscr{L}\{f(t)\}(s)+\beta\mathscr{L}\{g(t)\}(s)$$

Exemple :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{4t^2-3\cos 2t+5e^{-t}\}(s) &= 4\mathscr{L}\{t^2\}(s)-3\mathscr{L}\{\cos 2t\}(s) \\
&\quad +5\mathscr{L}\{e^{-t}\}(s) \\
&= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right)-3\left(\frac{s}{s^2+4}\right)+5\left(\frac{1}{s+1}\right) \\
&= \frac{8}{s^3}-\frac{3s}{s^2+4}+\frac{5}{s+1}.
\end{aligned}$$

Changement d'échelle

$$\mathscr{L}\{f(kt)\}(s) = \frac{1}{k}\mathscr{L}\{f(t)\}(\frac{s}{k})$$

Changement d'échelle

$$\mathscr{L}\{f(kt)\}(s) = \frac{1}{k}\mathscr{L}\{f(t)\}(\frac{s}{k})$$

Changement d'échelle

$$\mathscr{L}\{f(kt)\}(s) = \frac{1}{k}\mathscr{L}\{f(t)\}(\frac{s}{k})$$

Exemple :
Puisque $\mathscr{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$, on a

$$\mathscr{L}\{\sin 3t\}(s) = \frac{1}{3}\mathscr{L}\{\sin t\}(\frac{s}{3}) = \frac{1}{3}\frac{1}{(s/3)^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$$

translation de la variable s

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s-a)$$

translation de la variable s

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s-a)$$

translation de la variable s

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s-a)$$

Exemple : Puisque $\mathscr{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$, on a

$$\mathscr{L}\{e^{-t}\cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

translation de la variable t

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ et si $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t \leq a \end{cases}$ alors

$$\mathscr{L}\{g(t)\}(s) = e^{-as}F(s)$$

translation de la variable t

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ et si $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t \leq a \end{cases}$ alors

$$\mathscr{L}\{g(t)\}(s) = e^{-as}F(s)$$

translation de la variable t

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ et si $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t \leq a \end{cases}$ alors

$$\mathscr{L}\{g(t)\}(s) = e^{-as}F(s)$$

Exemple : Puisque $\mathscr{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$, alors la transformée de Laplace de la fonction

$$g(t) = \begin{cases} (t-2)^3 & t > 2 \\ 0 & t \leq 2 \end{cases}$$

est

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = \frac{6e^{-2s}}{s^4}$$

Transformée d'une dérivée

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, si elle est d'ordre exponentiel M et si f' admet une transformée de Laplace, alors

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathscr{L}\{f(t)\}(s) - f(0),$$

pour $\Re(s) > M$.

Exemple : Si $f(t) = \cos 3t$, alors $\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{s}{s^2+9}$ et nous avons

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}(s) = \mathscr{L}\{-3\sin 3t\}(s)$$

$$= -3\mathscr{L}\{\sin 3t\}(s) = -3 \times \frac{3}{s^2+9} = \frac{-9}{s^2+9}$$

Exemple : Si $f(t) = \cos 3t$, alors $\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{s}{s^2+9}$ et nous avons

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}(s) = \mathscr{L}\{-3\sin 3t\}(s)$$

$$= -3\mathscr{L}\{\sin 3t\}(s) = -3 \times \frac{3}{s^2+9} = \frac{-9}{s^2+9}$$

d'autre part en utilisons la formule, on a

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathscr{L}\{f(t)\}(s) - f(0) = s\left(\frac{s}{s^2+9}\right) - 1 = \frac{-9}{s^2+9}$$

Si dans le théorème précédent la fonction $t \mapsto f(t)$ n'est pas continue à $t = 0$, mais que $\lim_{t \to 0} f(t) = f(0^+)$ existe (tout en n'étant pas égale à $f(0)$, qui peut exister ou pas) alors

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathscr{L}\{f(t)\}(s) - f(0^+)$$

Si l'on applique plusieurs fois la règle du théorème précédent, on trouve, si f est de classe $\mathscr{C}^2$, et f, f' d'ordre exponentiel M :

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}(s) = s^2\mathscr{L}\{f(t)\}(s) - sf(0) - f'(0),$$

Si l'on applique plusieurs fois la règle du théorème précédent, on trouve, si f est de classe $\mathscr{C}^2$, et f, f' d'ordre exponentiel M :

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}(s) = s^2 \mathscr{L}\{f(t)\}(s) - sf(0) - f'(0),$$

et plus généralement, si f est de classe $\mathscr{C}^n$ et $f, f', \dots, f^{n-1}$ d'ordre exponentiel M :

$$\mathscr{L}\{f^n(t)\}(s) = s^n \mathscr{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Exemple : Montrons que $\mathscr{L}\{\sin at\} = \frac{a}{x^2+a^2}$. Posons $f(t) = \sin at$, donc $f'(t) = a\cos at$ et $f''(t) = -a^2 \sin at$. $f(0) = 0$, $f'(0) = a$, d'où d'après

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}(s) = s^2\mathscr{L}\{f(t)\}(s) - sf(0) - f'(0),$$

on a

$$\mathscr{L}\{-a^2 \sin at\} = s^2\mathscr{L}\{\sin at\} - s \times 0 - a$$

ou encore

$$-a^2\mathscr{L}\{\sin at\} = s^2\mathscr{L}\{\sin at\} - a$$

c-à-d.

$$\mathscr{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

Transformée d'une primitive

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ alors

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}$$

Transformée d'une primitive

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ alors

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}$$

Transformée d'une primitive

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ alors

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}$$

Exemple : Puisque $\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$, on a

$$\mathscr{L}\{\int_0^t \sin 2u du\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

Transformée d'une primitive

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ alors

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}$$

Exemple : Puisque $\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$, on a

$$\mathscr{L}\{\int_0^t \sin 2u du\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

comme il peut être directement vérifié

$$\mathscr{L}\{\int_0^t \sin 2u du\} = \mathscr{L}\{\frac{1}{2}(-\cos(2t)+1)\} = \frac{1}{2}\left(-\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s}\right) = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

Multiplication par t^n : dérivation de la transformée de Laplace

$$\mathscr{L}\left\{t^n f(t)\right\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(s)$$

Multiplication par t^n : dérivation de la transformée de Laplace

$$\mathscr{L}\left\{t^n f(t)\right\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(s)$$

Multiplication par t^n : dérivation de la transformée de Laplace

$$\mathscr{L}\left\{t^n f(t)\right\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(s)$$

Exemple : Puisque $\mathscr{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{te^{2t}\} &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2} \\
\mathscr{L}\{t^2e^{2t}\} &= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}
\end{aligned}$$

Un autre exemple

Calculons $\mathscr{L}\{t^n\}$ pour tout entier $n \geq 0$. On sait que $\mathscr{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s^2}$ pour $\Re(s) > 0$, donc

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{t^n\}(s) &= \mathscr{L}\{t^n \times 1\}(s) \\
&= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s^2}\right) \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Division par t

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ et si $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ existe alors

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{\infty} F(u)du$$

Division par t

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ et si $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ existe alors

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(u)du$$

Division par t

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ et si $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ existe alors

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(u)du$$

Exemple : Puisque $\mathscr{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ et $\lim_{t\to 0} \frac{sint}{t} = 1$, on a

$$\mathscr{L}\left\{\frac{sint}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1} = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan \frac{1}{s}$$

Comportement de $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ quand $s \to +\infty$

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, alors

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

Théorème de la valeur initiale

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ et si les limites indiquées existent, alors

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

Théorème de la valeur initiale

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ et si les limites indiquées existent, alors

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

Théorème de la valeur initiale

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ et si les limites indiquées existent, alors

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Théorème de la valeur finale

Si $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ et si les limites indiquées existent, alors

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Transformées de fonctions usuelles

Calculons pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathscr{L}\{t^{\alpha}\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha} dt, \qquad s > 0$$

avec $\alpha \in]-1; +\infty[$ (pour assurer la convergence de l'intégrale).

Transformées de fonctions usuelles

Calculons pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathscr{L}\{t^{\alpha}\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha} dt, \qquad s > 0$$

avec $\alpha \in]-1;+\infty[$ (pour assurer la convergence de l'intégrale). Posons $u = tp$. Alors, par changement de variables, nous avons

$$\mathscr{L}\{t^{\alpha}\}(s) = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} du$$

pour $s > 0$ et $\alpha > -1$. La dernière intégrale est indépendante de s, on peut donc poser

$$\mathscr{L}\{t^{\alpha}\}(s) = \frac{c_{\alpha}}{s^{\alpha+1}}$$

où

$$c_{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} du$$

Transformées de fonctions usuelles

Introduisons la **fonction Gamma** Γ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du.$$

Alors, $c_\alpha = \Gamma(\alpha+1)$, ce qui implique que

$$\mathscr{L}\{t^\alpha\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \qquad s > 0$$

Transformées de fonctions usuelles

Introduisons la **fonction Gamma** Γ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du.$$

Alors, $c_\alpha = \Gamma(\alpha+1)$, ce qui implique que

$$\mathscr{L}\left\{t^\alpha\right\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \qquad s > 0$$

On peut montrer que la fonction Γ, bien connue dans le domaine des mathématiques, est telle que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

et

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x > 0.$$

Transformées de fonctions usuelles

Considérons enfin la fonction de Heaviside H et prenons la translatée de cette fonction par a : $u_a(t) = H(t-a)$, telle que

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a \\ 1, & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

Transformées de fonctions usuelles

Considérons enfin la fonction de Heaviside H et prenons la translatée de cette fonction par a : $u_a(t) = H(t-a)$, telle que

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a \\ 1, & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

Alors, nous en déduisons que

$$\mathscr{L}\{u_a(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u_a(t)\, dt$$

Transformées de fonctions usuelles

Considérons enfin la fonction de Heaviside H et prenons la translatée de cette fonction par a : $u_a(t) = H(t-a)$, telle que

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a \\ 1, & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

Alors, nous en déduisons que

$$\mathscr{L}\{u_a(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} u_a(t)\, dt$$

En découpant le calcul entre $[0; a]$ et $[a; \infty]$, on obtient, si $\Re(s) > 0$,

$$\mathscr{L}\{u_a(t)\}(s) = \frac{1}{s} e^{-ap}, \qquad a \geq 0$$

La transformée de Laplace inverse

Comme nous l'avons vu, la transformation de Laplace est très intéressante lorsque l'on veut simplifier des calculs, par exemple sur une équation différentielle. Toutefois, cette démarche passe par le calcul de la transformée de Laplace de la solution de l'équation. Il serait bon de pouvoir, ayant obtenu cette fonction, revenir à la fonction de départ. Ceci s'effectue par transformée de Laplace inverse. Toutefois, il faut être sûr que cette reconstruction peut se faire de manière unique.

Formule de la transformée de Laplace inverse

Définissons maintenant la transformée de Laplace inverse :

Formule de la transformée de Laplace inverse

Définissons maintenant la transformée de Laplace inverse :
Si la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est $F(s)$ c-à-d. $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, alors $f(t)$ est appelée **transformée de Laplace inverse** de $F(s)$ et nous écrivons

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(t) \Longleftrightarrow \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$$

Formule de la transformée de Laplace inverse

Définissons maintenant la transformée de Laplace inverse :
Si la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est $F(s)$ c-à-d. $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, alors $f(t)$ est appelée **transformée de Laplace inverse** de $F(s)$ et nous écrivons

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(t) \Longleftrightarrow \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$$

Exemples

$f(s)$	$\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\}(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}$ $n \geq 0$	$\frac{t^n}{n!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}

Exemples

$f(s)$	$\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\}(t)$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

Propriétés

De manière similaire à la transformée de Laplace, la transformée de Laplace inverse est une transformation linéaire.

Linéarité

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)\}(t)=\alpha\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}(t)+\beta\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\}(t)$$

Propriétés

De manière similaire à la transformée de Laplace, la transformée de Laplace inverse est une transformation linéaire.

Linéarité

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)\}(t)=\alpha\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}(t)+\beta\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\}(t)$$

Propriétés

De manière similaire à la transformée de Laplace, la transformée de Laplace inverse est une transformation linéaire.

Linéarité

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)\}(t) = \alpha \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}(t) + \beta \mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\}(t)$$

Exemple :

$$\begin{aligned} & \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} \\ = \quad & 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} + 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} \\ = \quad & 4e^{2t} - 3\cos 4t + 5/2 \sin 2t \end{aligned}$$

Première propriété de translation

Si $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F\left(s-a\right)\right\}\left(t\right) = e^{at}\mathscr{L}^{-1}f\left(t\right)$$

Première propriété de translation

Si $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F\left(s-a\right)\right\}\left(t\right) = e^{at}\mathscr{L}^{-1}f\left(t\right)$$

Première propriété de translation

Si $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}(t) = e^{at}\mathscr{L}^{-1}f(t)$$

Exemple :

- Calculons $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-8s+25}\right\}$.

Première propriété de translation

Si $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}(t) = e^{at}\mathscr{L}^{-1}f(t)$$

Exemple :

- Calculons $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-8s+25}\right\}$.

Première propriété de translation

Si $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F\left(s-a\right)\right\}\left(t\right) = e^{at}\mathscr{L}^{-1}f\left(t\right)$$

Exemple :

- Calculons $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-8s+25}\right\}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-8s+25}\right\}(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2+9}\right\} \\
&= e^{4t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} \\
&= \frac{1}{3}e^{4t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} \\
&= \frac{1}{3}e^{4t}\sin 3t
\end{aligned}$$

Deuxième propriété de translation

S

i $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t) = \begin{cases} f(t-a) & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$$

Deuxième propriété de translation

S

i $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t) = \begin{cases} f(t-a) & ,t > a \\ 0 & ,t < a \end{cases}$$

Deuxième propriété de translation

S

i $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t) = \begin{cases} f(t-a) & ,t > a \\ 0 & ,t < a \end{cases}$$

Exemple : Puisque $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}(t) = \sin t$, on a

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\}(t) = \begin{cases} \sin(t-\pi/3) & ,t > \pi/3 \\ 0 & ,t < \pi/3 \end{cases}$$

Propriété de changement d'échelle

S

i $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(ks)\}(t) = \frac{1}{k} f \frac{t}{k})$$

Propriété de changement d'échelle

S

i $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(ks)\}(t) = \frac{1}{k} f \frac{t}{k})$$

Propriété de changement d'échelle

S

i $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(ks)\}(t) = \frac{1}{k} f \frac{t}{k})$$

Exemple : Puisque $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+16}\}(t) = \cos 4t$, on a

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\right\}(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{4t}{2} = \frac{1}{2}\cos 2t$$

Propriété inverse de dérivation

S

i $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\}(t) = (-1)^n t^n f(t)$$

Propriété inverse de dérivation

S

i $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\}(t) = (-1)^n t^n f(t)$$

Propriété inverse de dérivation

S

i $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\}(t) = (-1)^n t^n f(t)$$

Exemple : Puisque $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}(t) = \sin$, et que $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{-2s}{(s+1)^2}$ on a

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s+1)^2}\right\}(t) = -t\sin t$$

Propriété inverse d'intégration

S

i $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(u)du\right\}(t) = \frac{f(t)}{t}$$

Propriété inverse d'intégration

S

i $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(u)du\right\}(t) = \frac{f(t)}{t}$$

Propriété inverse d'intégration

S

i $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, alors

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)du\right\}(t) = \frac{f(t)}{t}$$

Exemple : Puisque $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s+1)}\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\}(t) = 1 - e^{-t}$, on a

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})du\right\}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\ln(1+\frac{1}{s})\right\}(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$$

Propriété de convolution

Si f et g deux fonctions, alors on appelle **convolution** de f et g, la fonction définie par

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

On remarque que $f*g = g*f$.

Propriété de convolution

Si f et g deux fonctions, alors on appelle **convolution** de f et g, la fonction définie par

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

On remarque que $f*g = g*f$.

Propriété de convolution pour $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}\{(f\star g)(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)\times\mathscr{L}\{g(t)\}(s)$$

Propriété de convolution

Propriété de convolution pour $\mathscr{L}^{-1}$

Si $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ et $\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f * g)(t)$$

Propriété de convolution

Propriété de convolution pour $\mathscr{L}^{-1}$

Si $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ et $\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f * g)(t)$$

Propriété de convolution

Propriété de convolution pour $\mathscr{L}^{-1}$

Si $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ et $\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ alors

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f * g)(t)$$

Exemple : Puisque $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}(t) = e^t$ et que $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}(t) = e^{2t}$, on a

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}(t) = e^t * e^{2t} = \int_0^t e^u e^{2(t-u)} du = e^{2t} - e^t$$

Applications aux EDO à coefficients constants

Exemple 1

Résoudre $y'' + y = t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$

Applications aux EDO à coefficients constants

Exemple 1

Résoudre $y'' + y = t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$

Applications aux EDO à coefficients constants

Exemple 1

Résoudre $y'' + y = t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$

Posons $\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$.

Applications aux EDO à coefficients constants

Exemple 1

Résoudre $y'' + y = t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$

Posons $\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$. En prenant les transformée de Laplace de deux membre de l'équation différentielle et en tenant compte des conditions données,

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) + Y = \frac{1}{s^2}, \quad \text{soit} \quad s^2 Y - s + 2 + Y = \frac{1}{s^2}$$

Applications aux EDO à coefficients constants

Exemple 1

Résoudre $y'' + y = t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$

Posons $\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$. En prenant les transformée de Laplace de deux membre de l'équation différentielle et en tenant compte des conditions données,

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) + Y = \frac{1}{s^2}, \quad \text{soit} \quad s^2 Y - s + 2 + Y = \frac{1}{s^2}$$

d'où

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}, \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1} \end{aligned}$$

et par suite

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\} = t + \cos t - 3\sin t$$

et par suite

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\} = t + \cos t - 3\sin t$$

Réciproquement, on vérifie assez facilement que cette fonction est bien solution du problème posé.

Applications aux EDO à coefficients constants

Exemple 2

Résoudre $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t$ avec $y'(0) = 0$ et $y'(0) = -2$

Applications aux EDO à coefficients constants

Exemple 2

Résoudre $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t$ avec $y'(0) = 0$ et $y'(0) = -2$

Applications aux EDO à coefficients constants

Exemple 2

Résoudre $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t$ avec $y'(0) = 0$ et $y'(0) = -2$

Posons $\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$,

Applications aux EDO à coefficients constants

Exemple 2

Résoudre $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t$ avec $y'(0) = 0$ et $y'(0) = -2$

Posons $\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$, donc

$$\mathscr{L}\{y'''\} - 3\mathscr{L}\{y''\} + 3\mathscr{L}\{y'\} - \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t^2 e^t\} = \frac{2}{s-1)^3}$$

Applications aux EDO à coefficients constants

Exemple 2

Résoudre $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t$ avec $y'(0) = 0$ et $y'(0) = -2$

Posons $\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$, donc

$$\mathscr{L}\{y'''\} - 3\mathscr{L}\{y''\} + 3\mathscr{L}\{y'\} - \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t^2 e^t\} = \frac{2}{s-1)^3}$$

d'où

$$\left(s^3 Y - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)\right) - 3\left(s^2 Y - sy(0) - y'(0)\right)$$
$$+3\left(sY - y(0)\right) - Y = \frac{2}{s-1)^3}$$

ou encore

$$(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y - s^2 + 3s - 1 = \frac{2}{s-1)^3}$$

et

$$Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

On décompose la première fraction rationnelle et on trouve

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

On décompose la première fraction rationnelle et on trouve

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

d'où

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}\}(t) \\ &= e^t - te^t - \frac{t^2e^t}{2} + \frac{t^5e^t}{60} \end{aligned}$$

Applications aux EDO à coefficients variables

Exemple 3

Résoudre $ty'' + 2y' + ty = 0$ avec $y(0^+) = 1$ et $y(\pi) = 0$

Applications aux EDO à coefficients variables

Exemple 3

Résoudre $ty'' + 2y' + ty = 0$ avec $y(0^+) = 1$ et $y(\pi) = 0$

Applications aux EDO à coefficients variables

Exemple 3

Résoudre $ty'' + 2y' + ty = 0$ avec $y(0^+) = 1$ et $y(\pi) = 0$

Posons $\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$, donc

$$\mathscr{L}\{ty''\} + 2\mathscr{L}\{y'\} + \mathscr{L}\{ty\} = \mathscr{L}\{0\} = 0$$

donc

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y - sy(0^+) - y'(0^+)\right) + 2\left(sY - y(0^+)\right) - \frac{d}{ds}Y = 0$$

c-à-d.

$$-(s^2+1)\frac{dY}{ds} - 1 = 0$$

et en intégrant cette équation différentielle du 1er ordre on trouve

$$Y(s) = -\arctan s + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Applications aux EDO à coefficients variables

Exemple 3

Résoudre $ty'' + 2y' + ty = 0$ avec $y(0^+) = 1$ et $y(\pi) = 0$

Posons $\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$, donc

$$\mathscr{L}\{ty''\} + 2\mathscr{L}\{y'\} + \mathscr{L}\{ty\} = \mathscr{L}\{0\} = 0$$

donc

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2 Y - sy(0^+) - y'(0^+)\right) + 2\left(sY - y(0^+)\right) - \frac{d}{ds} Y = 0$$

c-à-d.

$$-(s^2+1)\frac{dY}{ds} - 1 = 0$$

et en intégrant cette équation différentielle du 1er ordre on trouve

$$Y(s) = -\arctan s + C, \;\; C \in \mathbb{R}$$

Comme $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ on trouve $A = \pi/2$

d'où

$$Y(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan \frac{1}{s}$$

d'où

$$Y(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan \frac{1}{s}$$

on utilise le développement de la fonction *arctanx* en série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ donc

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{\arctan \frac{1}{s}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{s^{2n+1}}\} \\ &= 1 - \frac{1}{3}\frac{t^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\frac{t^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ &= \frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

qui satisfait bien $y(\pi) = 0$.

d'où

$$Y(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan \frac{1}{s}$$

on utilise le développement de la fonction *arctanx* en série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ donc

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{\arctan \frac{1}{s}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{s^{2n+1}}\} \\ &= 1 - \frac{1}{3}\frac{t^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\frac{t^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ &= \frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

qui satisfait bien $y(\pi) = 0$.
Réciproquement, on vérifie que la fonction $y(t) = \frac{\sin t}{t}$ est bien solution du problème posé.

Applications à la résolution des équations aux dérivées partielles

Exemple, tiré du test de Novembre 2016

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 16x + \sin x \tag{2}$$

où $y = y(x,t)$, avec les conditions $y(0,t) = 0, y(\pi,t) = 16\pi$, $y_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} y(x,t)_{|t=0} = 0$ et $y(x,0) = 16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x$

Applications à la résolution des équations aux dérivées partielles

Exemple, tiré du test de Novembre 2016

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 16x + \sin x \tag{2}$$

où $y = y(x,t)$, avec les conditions $y(0,t) = 0, y(\pi,t) = 16\pi$, $y_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}y(x,t)_{|t=0} = 0$ et $y(x,0) = 16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x$

Applications à la résolution des équations aux dérivées partielles

Exemple, tiré du test de Novembre 2016

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 16x + \sin x \tag{2}$$

où $y = y(x,t)$, avec les conditions $y(0,t) = 0, y(\pi,t) = 16\pi$, $y_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} y(x,t)_{|t=0} = 0$ et $y(x,0) = 16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x$

On pose $Y(x,s) = \mathscr{L}(y(x,t))(s)$ (transformée de Laplace par rapport à la variable t).

On prend la transformée de Laplace de l'EDP par rapport à la variable t, on trouve

$$(s^2 Y(x,s) - sy(x,0) - y_t(x,0)) - 4\frac{d^2 Y(x,s)}{dx^2} + Y(x,s) = \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s}$$

On prend la transformée de Laplace de l'EDP par rapport à la variable t, on trouve

$$(s^2Y(x,s)-sy(x,0)-y_t(x,0))-4\frac{d^2Y(x,s)}{dx^2}+Y(x,s)=\frac{16x}{s}+\frac{\sin x}{s}$$

Puisque $y(x,0)=16x+12\sin 2x-8\sin 3x$ et $y_t(x,0)=\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)_{|t=0}=0$, on trouve l'équation différentielle suivante (du second ordre par rapport à x) :

$$\frac{d^2Y}{dx^2}-\frac{1}{4}(s^2+1)Y=-\frac{4(s^2+1)x}{s}-\frac{\sin x}{4s}-3s\sin(2x)+2s\sin(3x). \tag{3}$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} Y(0,s)&=\mathscr{L}[y(0,t)](s)=\mathscr{L}[0](s)=0, \quad \text{et}\\ Y(\pi,s)&=\mathscr{L}[y(\pi,t)](s)=16\pi\mathscr{L}[1](s)=\tfrac{16\pi}{s}\end{aligned} \tag{4}$$

D'après la forme du second membre de l'équation (2) [en tant que fonction de x] on déduit qu'une solution particulière de (2) est de la forme $Y_P(x,s) = ax + b\sin x + c\sin 2x + d\sin 3x$.

D'après la forme du second membre de l'équation (2) [en tant que fonction de x] on déduit qu'une solution particulière de (2) est de la forme $Y_P(x,s) = ax + b\sin x + c\sin 2x + d\sin 3x$. En dérivant et substituant dans (2) et en égalant les coefficients des termes analogues, on trouve

$$Y_P(x,s) = \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37}$$

D'après la forme du second membre de l'équation (2) [en tant que fonction de x] on déduit qu'une solution particulière de (2) est de la forme $Y_P(x,s) = ax + b\sin x + c\sin 2x + d\sin 3x$. En dérivant et substituant dans (2) et en égalant les coefficients des termes analogues, on trouve

$$Y_P(x,s) = \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37}$$

La solution générale de l'équation homogène associée à (2) est de la forme

$$Y_H(x,s) = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles.

D'après la forme du second membre de l'équation (2) [en tant que fonction de x] on déduit qu'une solution particulière de (2) est de la forme $Y_P(x,s) = ax + b\sin x + c\sin 2x + d\sin 3x$. En dérivant et substituant dans (2) et en égalant les coefficients des termes analogues, on trouve

$$Y_P(x,s) = \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37}$$

La solution générale de l'équation homogène associée à (2) est de la forme

$$Y_H(x,s) = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles. La solution générale de (2) est donc

$$\begin{aligned} Y(x,s) &= Y_H(x,s) + Y_P(x,s) \\ &= c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x} \\ &\quad + \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37} \end{aligned}$$

Les conditions initiales (3) portées en (4) donne

$$0 = Y(0,s) = c_1 + c_2,$$

et

$$\frac{16\pi}{s} = Y(\pi,s) = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\pi} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\pi} + \frac{16\pi}{s}$$

donc $c_1 = c_2 = 0$ et

$$Y(x,s) = \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37}.$$

Les conditions initiales (3) portées en (4) donne

$$0 = Y(0,s) = c_1 + c_2,$$

et

$$\frac{16\pi}{s} = Y(\pi,s) = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\pi} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\pi} + \frac{16\pi}{s}$$

donc $c_1 = c_2 = 0$ et

$$Y(x,s) = \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37}.$$

En prenant la transformée de Laplace inverse, on trouve la solution cherchée

$$y(x,t) = 16x + \frac{\sin x}{5}(1-\cos\sqrt{5}t) + 12\sin 2x\cos\sqrt{17}t - 8\sin 3x\cos\sqrt{37}t.$$