Synthèse du chapitre 6
Transformée de Fourier

Math pour Ingénieurs – S5/1A NRJ ; ISN

27 Novembre 2023

Transformée de Fourier

Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, la fonction $\hat{f}$ définie par

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt, \;\; \nu \in \mathbb{R}$$

a condition que l'intégrale existe en tant qu'intégrale impropre de Riemann.
L'application

$$\mathscr{F} : f \mapsto \hat{f}$$

est appelée transformation de Fourier. La fonction $\hat{f}$ ou $\mathscr{F}[f]$ est alors appelée la transformée de Fourier de f.

La définition précédente de la transformation de Fourier n'est pas toujours celle choisie par d'autres auteurs.
Par exemple, certains utilisent la définition suivante

$$\widetilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\nu t}dt, \ \ \nu \in \mathbb{R}$$

Cela entraîne des modifications dans certaines propriétés en utilisant $\hat{f}\left(\frac{\nu}{2\pi}\right) = \widetilde{f}(\nu)$

Un peu de langage

Du point de vue de la physique, on dit que $t \mapsto f(t)$ dépend du temps alors que $\nu \mapsto \hat{f}(\nu)$ dépend de la fréquence.
On dit aussi parfois que f est définie dans le domaine temporel et que $\hat{f}$ l'est dans le domaine fréquentiel.
Puisque $t \mapsto e^{-2i\pi\nu t}$ est une fonction à valeurs complexe, $\hat{f}$ est en générale aussi une fonction à valeurs complexes, donc $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
En général $\hat{f}$ se scinde en une partie réelle et une partie imaginaire.
On étudie aussi parfois le spectre d'amplitude $|\hat{f}(\nu)|^2$ et son spectre de phase $\arg \hat{f}(\nu)$.
Enfin en analyse du signal la quantité $|\hat{f}(\nu)|^2$ s'appelle la densité spectrale d'énergie.

Transformée de Fourier de l'impulsion rectangulaire/ fonction rectangle/fonction porte

Soit la fonction "**porte**"

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| > 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad |x| < 1/2 \end{cases}$$

Pour $\nu \neq 0$ on a

$$\widehat{\Pi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi\nu t} dt = \frac{-1}{2i\pi\nu}[e^{-i\pi\nu} - e^{i\pi\nu}]$$

et pour $n^{\circ} = 0$ on a $\widehat{\Pi}(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} 1 dt = 1$. Donc

$$\widehat{\Pi}(\nu) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} & \text{si} \quad \nu \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad \nu = 0 \end{cases}$$

Remarquez que $\Pi \in L^1(\mathbb{R})$ mais $\widehat{\Pi} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Soit f_a la fonction triangle de hauteur 1 et de durée $2a$ définie par

$$f_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec un calcul identique à celui de l'exemple précédent on trouve

$$\hat{f}_a(\nu) = \begin{cases} \frac{\sin^2(a\pi\nu)}{a\pi^2\nu^2} & \nu \neq 0 \\ a & \nu = 0 \end{cases}$$

L a fonction $e^{-a|t|}$

Soit $a > 0$ et $f(t) = e^{-a|t|}$. On a

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-2i\pi\nu t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-2i\pi\nu t} dt \\
&= \left[\frac{e^{(a-2i\pi\nu)t}}{a-2i\pi\nu}\right]_{t\to-\infty}^{t=0} - \left[\frac{e^{-(a+2i\pi\nu)t}}{a+2i\pi\nu}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} \\
&= \frac{1}{a-2i\pi\nu} + \frac{1}{a+2i\pi\nu} \\
&= \frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}
\end{aligned}$$

Propriétés générales

Théorème

Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\widehat{h}$ *sa transformée de Fourier. Alors,* $\widehat{h}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *et bornée :*

$$\left\|\widehat{h}\right\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{h}(x)\right| \leqslant \|h\|_1 ,$$

Propriétés générales

Théorème

Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\widehat{h}$ *sa transformée de Fourier. Alors,* $\widehat{h}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *et bornée :*

$$\left\|\widehat{h}\right\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{h}(x)\right| \leqslant \|h\|_1 ,$$

Propriétés générales

Théorème

Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\widehat{h}$ *sa transformée de Fourier. Alors,* $\widehat{h}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *et bornée :*

$$\left\|\widehat{h}\right\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{h}(x)\right| \leqslant \|h\|_1,$$

On a aussi le lemme de **Riemann-Lebesgue** :

Théorème

Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\widehat{h}$ *sa transformée de Fourier. Alors,*

$$\lim_{\nu\to\pm\infty} \left|\widehat{h}(\nu)\right| = 0.$$

Le résultat suivant précise la linéarité et la continuité de la transformation $\widehat{.}$

Théorème

La transformée de Fourier est une opération linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$), c'est-à-dire

Le résultat suivant précise la linéarité et la continuité de la transformation $\widehat{.}$

Théorème

La transformée de Fourier est une opération linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$), c'est-à-dire

(i) $\forall h, g \in L^1(\mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\lambda \widehat{h + \mu} g = \lambda \widehat{h} + \mu \widehat{g} \tag{1}$$

Le résultat suivant précise la linéarité et la continuité de la transformation $\widehat{.}$

Théorème

La transformée de Fourier est une opération linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$), c'est-à-dire

(i) $\forall h, g \in L^1(\mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\widehat{\lambda h + \mu g} = \lambda \widehat{h} + \mu \widehat{g} \tag{1}$$

Le résultat suivant précise la linéarité et la continuité de la transformation $\widehat{\ }$.

Théorème

La transformée de Fourier est une opération linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$), c'est-à-dire

(i) $\forall h, g \in L^1(\mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\lambda\,\widehat{h+\mu}g = \lambda\,\widehat{h} + \mu\widehat{g} \tag{1}$$

(ii) *si la suite* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie*

$$h_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} h \in L^1(\mathbb{R}) \tag{2}$$

alors

$$\widehat{h}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \widehat{h} \text{ uniformément} \tag{3}$$

Inversion de la transformée de Fourier

La question est maintenant la suivante : peut-on inverser la transformée de Fourier ? Nous venons de voir que $h \in L^1$ n'implique pas que $\widehat{h} \in L^1$. Dans le cadre actuel de nos espaces, nous ne pouvons donc pas prendre une "transformée" de Fourier de $\widehat{h}$. Toutefois, nous avons le théorème suivant.

Inversion de la transformée de Fourier

La question est maintenant la suivante : peut-on inverser la transformée de Fourier ? Nous venons de voir que $h \in L^1$ n'implique pas que $\widehat{h} \in L^1$. Dans le cadre actuel de nos espaces, nous ne pouvons donc pas prendre une "transformée" de Fourier de $\widehat{h}$. Toutefois, nous avons le théorème suivant.

Théorème (théorème d'inversion)

Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$, une fonction telle que $\widehat{h} \in L^1$. Alors on peut calculer $\widehat{\widehat{h}}$, et on a, pour presque tout t (pour tout t si h est continue) :

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\nu) e^{2i\pi\nu t} df = \widehat{[\widehat{h}(\nu)]}(-t).$$

Un résultat pratique :

Proposition

Si h est de classe $\mathscr{C}^2$, et si h, h' et h'' sont toutes intégrables, alors $\widehat{h}$ l'est également.

Un résultat pratique :

Proposition

Si h est de classe $\mathscr{C}^2$, et si h, h' et h'' sont toutes intégrables, alors $\widehat{h}$ l'est également.

Un résultat pratique :

Proposition

Si h est de classe $\mathscr{C}^2$, et si h, h' et h'' sont toutes intégrables, alors $\widehat{h}$ l'est également.

Enfin, la formule d'inversion nous donne une propriété importante.

Théorème (Injectivité)

La formule d'inversion permet de déduire d'autres transformées de Fourier. On va pouvoir lire des tables de transformées de Fourier de gauche à droite et de droite à gauche, en faisant toutefois bien attention au signe...

Un résultat pratique :

Proposition

Si h est de classe $\mathscr{C}^2$, et si h, h' et h'' sont toutes intégrables, alors $\widehat{h}$ l'est également.

Enfin, la formule d'inversion nous donne une propriété importante.

Théorème (Injectivité)

- *Soit $h \in L^1$ telle que $\widehat{h} = 0$. Alors $h = 0$ presque partout.*

La formule d'inversion permet de déduire d'autres transformées de Fourier. On va pouvoir lire des tables de transformées de Fourier de gauche à droite et de droite à gauche, en faisant toutefois bien attention au signe...

Un résultat pratique :

Proposition

Si h est de classe $\mathscr{C}^2$, et si h, h' et h'' sont toutes intégrables, alors $\widehat{h}$ l'est également.

Enfin, la formule d'inversion nous donne une propriété importante.

Théorème (Injectivité)

- *Soit $h \in L^1$ telle que $\widehat{h} = 0$. Alors $h = 0$ presque partout.*
- *Soient $g, h \in L^1$ telles que $\widehat{g} = \widehat{h}$. Alors $g = h$ presque partout.*

La formule d'inversion permet de déduire d'autres transformées de Fourier. On va pouvoir lire des tables de transformées de Fourier de gauche à droite et de droite à gauche, en faisant toutefois bien attention au signe...

Transformée de Fourier de quelques fonctions usuelles

$f(t)$	$e^{-\lvert a\rvert t}$	e^{-at^2}	$\dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$
$\hat{f}(\nu)$	$\dfrac{2a}{a^2+(2\pi\nu)^2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$	$e^{-2\pi^2\nu^2a^2}$

Propriétés de la transformée de Fourier

Intéressons nous maintenant à des propriétés calculatoires de la transformée de Fourier.
Si h est une fonction telle que sa transformée de Fourier existe, alors nous avons les propriétés suivantes :

- Conjuguée

$$\widehat{\overline{h}}(\nu) = \overline{\widehat{h}(-\nu)}$$

Propriétés de la transformée de Fourier

Intéressons nous maintenant à des propriétés calculatoires de la transformée de Fourier.
Si h est une fonction telle que sa transformée de Fourier existe, alors nous avons les propriétés suivantes :

- Conjuguée

$$\widehat{\overline{h}}(\nu) = \overline{\widehat{h}(-\nu)}$$

- Symétrie temporelle

$$\widehat{h(-t)}(\nu) = \widehat{h(t)}(-\nu)$$

Des propriétés de symétrie et de conjugaison, on déduit :

- Parité Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. h et $\widehat{h}$ ont même parité

Des propriétés de symétrie et de conjugaison, on déduit :

- Parité Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. h et $\widehat{h}$ ont même parité
- Parties réelle et imaginaire

$$\begin{aligned} h \text{ réelle} &\iff \widehat{h} \text{ hermitienne} \\ h \text{ imaginaire} &\iff \widehat{h} \text{ anti-hermitienne} \end{aligned} \tag{4}$$

où une fonction hermitienne est telle que $g(-x) = \overline{g(x)}$ et anti-hermitienne $g(-x) = -\overline{g(x)}$

Des propriétés de symétrie et de conjugaison, on déduit :

- Parité Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. h et $\widehat{h}$ ont même parité
- Parties réelle et imaginaire

$$\begin{aligned} h \text{ réelle } &\iff \widehat{h} \text{ hermitienne} \\ h \text{ imaginaire } &\iff \widehat{h} \text{ anti-hermitienne} \end{aligned} \tag{4}$$

  où une fonction hermitienne est telle que $g(-x) = \overline{g(x)}$ et anti-hermitienne $g(-x) = -\overline{g(x)}$
- Translation temporelle Soit $a \in \mathbb{R}$, alors on a la relation

$$\widehat{h(t-a)}(\nu) = e^{-2i\pi\nu a}\widehat{h(t)}(\nu)$$

  A la translation de $h(t)$ correspond un déphasage de $\widehat{h}(\nu)$ proportionnel à ν.

Si h est périodique, $h(t) = h(t-a)$, alors $(e^{-2i\pi\nu a} - 1)\widehat{h}(\nu) = 0$ ce qui implique que $\widehat{h}$ est nulle partout sauf aux points $\nu_n = \frac{n}{a}$.
L'intégrale de Fourier dégénère en série de Fourier.

- Translation fréquentielle / Modulation de fréquence Soit $a \in \mathbb{R}$, alors on a la relation

$$\widehat{h}(\nu - \nu_0) = \widehat{h(t)e^{2i\pi\nu_0 t}}(\nu)$$

A la modulation de $h(t)$ (i.e. la multiplication de $h(t)$ par un facteur oscillatoire $e^{2i\pi\nu_0 t}$) correspond la translation de $\widehat{h}(\nu)$.

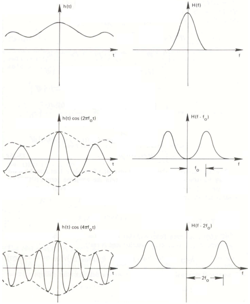

Figure – Propriété de translation fréquentielle avec $\widehat{h}$ une fonction réelle. Ce phénomène est appelé **modulation de fréquence**.

- Changement d'échelle Soit $a \in \mathbb{R}^*$, alors on peut montrer que l'on a la relation

$$\widehat{h(at)}(\nu) = \frac{1}{|a|}\widehat{h(t)}\left(\frac{\nu}{a}\right).$$

De même,

$$\widehat{h(t)}(a\nu) = \frac{1}{|a|}\widehat{h(\frac{t}{a})}(\nu).$$

A la dilatation de $h(t)$ correspond une compression et une augmentation des amplitudes de $\widehat{h}(\nu)$. De même, à une dilatation de $\widehat{h}(\nu)$ correspond une compression et une augmentation de l'amplitude de $h(t)$.
Remarquons que dans 3, l'aire du rectangle reste constante. De même, dans 2, si $\widehat{h} \in L^1$, l'intégrale de la fonction fréquentielle reste constante. Ce phénomène est bien connu dans la théorie des radars et des antennes.

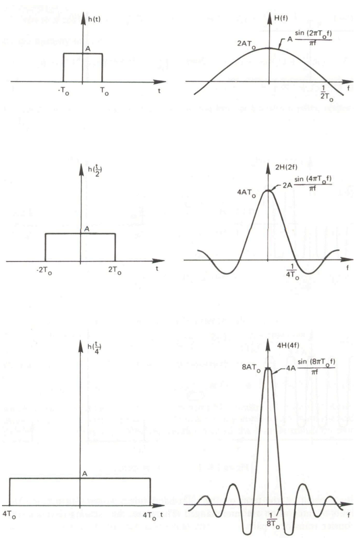

Figure – Propriété de changement d'échelle. $\widehat{h}$ est noté H.

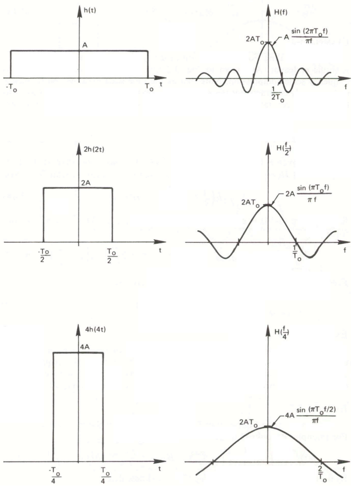

Figure – Propriété de changement d'échelle (suite). $\widehat{h}$ est noté H.

- Dérivation Plus $h(t)$ décroît rapidement, plus $\widehat{h}(\nu)$ est dérivable et à dérivées bornées.

- **Dérivation** Plus $h(t)$ décroît rapidement, plus $\widehat{h}(\nu)$ est dérivable et à dérivées bornées.

Théorème

Soit $h \in L^1$, une fonction décroissant suffisamment vite pour que

$$t \mapsto t^p h(t)$$

soit également dans L^1. Alors, $\widehat{h}$ est de classe $\mathscr{C}^p$, et les dérivées de $\widehat{h}$ jusqu'à l'ordre p sont bornées. De plus,

$$\widehat{h}^{(p)}(\nu) = (-2i\pi)^p \int_{\mathbb{R}} t^p h(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = [\widehat{(-2i\pi t)^p h(t)}](\nu). \quad (5)$$

Théorème

Inversement, si $h \in L^1$, si h est de classe $\mathscr{C}^p$, et si de plus, les dérivées successives $h^{(k)}$ sont intégrables pour $k = 1, \ldots, p$, alors on a

$$\widehat{h^{(k)}}(\nu) = (2i\pi\nu)^k \, \widehat{h}(\nu), \quad k = 1, \ldots, p. \tag{6}$$

La fonction Gaussiènne

Soit $a > 0$ et $g_a(t) = e^{-at^2}$.
On a $g_a'(t) = -2atg_a(t)$. On applique la transformée de Fourier aux deux membre de cette égalité et on trouve :

$$\mathscr{F}\{g_a'(t)\}(\nu) = -2a\mathscr{F}\{tg_a(t)\}(\nu)$$

Les propriétés de la transformée de Fourier d'une dérivée et de la multiplication par t donnent

$$2i\pi\nu\hat{g}_a(\nu) = -2a\left(\frac{1}{-2i\pi}\right)\frac{d}{d\nu}\hat{g}_a(\nu)$$

D'où l'équation différentielle

$$\frac{d}{d\nu}\hat{g}_a(\nu) = -\frac{2\pi^2\nu}{a}\hat{g}_a(\nu)$$

La solution de cette équation différentielle est

$$\hat{g}_a(\nu) = Ke^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$$

La constante K est donnée par

$$K = \hat{g}_a(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t\sqrt{a})^2} \sqrt{a} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

car $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.
Ainsi

$$\hat{g}_a(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$$

Conclusion :

$$\mathscr{F}[e^{-at^2}](\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$$

Introduisons maintenant le support d'une fonction h défini par $\mathrm{Supp} h = \{t \in \mathbb{R} / h(t) \neq 0\}$.

Introduisons maintenant le support d'une fonction h défini par $\mathrm{Supp} h = \{t \in \mathbb{R} / h(t) \neq 0\}$. On a alors la proposition suivante.

Proposition

Si h est L^1 à support borné, alors $\widehat{h}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Introduisons maintenant le support d'une fonction h défini par $\mathrm{Supp} h = \{t \in \mathbb{R} / h(t) \neq 0\}$. On a alors la proposition suivante.

Proposition

Si h est L^1 à support borné, alors $\widehat{h}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Introduisons maintenant le support d'une fonction h défini par $\mathrm{Supp} h = \{t \in \mathbb{R} / h(t) \neq 0\}$. On a alors la proposition suivante.

Proposition

Si h est L^1 à support borné, alors $\widehat{h}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Ces propriétés de dérivation jouent un rôle essentiel pour la résolution des équations différentielles linéaires. Une équation différentielle linéaire se transforme par Fourier en une équation algébrique, ce qui simplifie la résolution.

Transformée de Fourier d'une fonction L^2

Nous avons défini la transformée de Fourier pour des fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R})$. Nous avons vu qu'alors la transformée de Fourier d'une fonction $h \in L^1$ n'est pas nécessairement dans L^1, et donc que la formule d'inversion n'est pas nécessairement valide.

Transformée de Fourier d'une fonction L^2

Nous avons défini la transformée de Fourier pour des fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R})$. Nous avons vu qu'alors la transformée de Fourier d'une fonction $h \in L^1$ n'est pas nécessairement dans L^1, et donc que la formule d'inversion n'est pas nécessairement valide.
Nous travaillons maintenant sur
$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad \text{telle que } \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty\}$.

Transformée de Fourier d'une fonction L^2

Nous avons défini la transformée de Fourier pour des fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R})$. Nous avons vu qu'alors la transformée de Fourier d'une fonction $h \in L^1$ n'est pas nécessairement dans L^1, et donc que la formule d'inversion n'est pas nécessairement valide.
Nous travaillons maintenant sur
$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad \text{telle que } \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty\}$.
Faisons quelques remarques sur $L^2(\mathbb{R})$.

- Il n'y a pas de relation d'inclusion entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$. Il existe des fonctions $h \in L^2(\mathbb{R})$ mais telles que $h \notin L^1(\mathbb{R})$: par exemple, $h(t) = \frac{1}{t}\mathbf{1}_{|t|>1}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ mais $h \notin L^1(\mathbb{R})$; ou $h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{1}_{]0,1]}(t) \in L^1(\mathbb{R})$ mais $h \notin L^2(\mathbb{R})$.

Transformée de Fourier d'une fonction L^2

Nous avons défini la transformée de Fourier pour des fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R})$. Nous avons vu qu'alors la transformée de Fourier d'une fonction $h \in L^1$ n'est pas nécessairement dans L^1, et donc que la formule d'inversion n'est pas nécessairement valide.
Nous travaillons maintenant sur
$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad \text{telle que } \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty\}$.
Faisons quelques remarques sur $L^2(\mathbb{R})$.

- Il n'y a pas de relation d'inclusion entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$. Il existe des fonctions $h \in L^2(\mathbb{R})$ mais telles que $h \notin L^1(\mathbb{R})$: par exemple, $h(t) = \frac{1}{t}\mathbf{1}_{|t|>1}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ mais $h \notin L^1(\mathbb{R})$; ou $h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{1}_{]0,1]}(t) \in L^1(\mathbb{R})$ mais $h \notin L^2(\mathbb{R})$.

Transformée de Fourier d'une fonction L^2

Nous avons défini la transformée de Fourier pour des fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R})$. Nous avons vu qu'alors la transformée de Fourier d'une fonction $h \in L^1$ n'est pas nécessairement dans L^1, et donc que la formule d'inversion n'est pas nécessairement valide.
Nous travaillons maintenant sur
$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad \text{telle que } \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty\}$.
Faisons quelques remarques sur $L^2(\mathbb{R})$.

- Il n'y a pas de relation d'inclusion entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$. Il existe des fonctions $h \in L^2(\mathbb{R})$ mais telles que $h \notin L^1(\mathbb{R})$: par exemple, $h(t) = \frac{1}{t}\mathbf{1}_{|t|>1}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ mais $h \notin L^1(\mathbb{R})$; ou $h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{1}_{]0,1]}(t) \in L^1(\mathbb{R})$ mais $h \notin L^2(\mathbb{R})$.
- L'espace L^2 est très important en physique, car on calcule souvent l'énergie comme l'intégrale du carré d'une fonction. Il est donc important que l'outil des transformées de Fourier fonctionne aussi pour les fonctions de L^2.

La transformée de Fourier et l'espace de Schwartz

Avant d'avoir des résultats sur L^2, définissons l'**espace de Schwartz** $\mathscr{S} \subset L^2(\mathbb{R})$, sur lequel on aura

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot} : \quad \mathscr{S} &\to \mathscr{S} \qquad (7) \\ h &\mapsto \widehat{h} \qquad (8) \end{aligned}$$

qui sera une bijection, facile à inverser.

La transformée de Fourier et l'espace de Schwartz

Avant d'avoir des résultats sur L^2, définissons l'**espace de Schwartz** $\mathscr{S} \subset L^2(\mathbb{R})$, sur lequel on aura

$$\widehat{\cdot} : \quad \mathscr{S} \to \mathscr{S} \tag{7}$$
$$h \mapsto \widehat{h} \tag{8}$$

qui sera une bijection, facile à inverser. Pour cela, il faudra que la formule d'inversion soit encore valide, et donc que les fonctions de cet espace soient à la fois intégrables et de transformée de Fourier intégrables.

La transformée de Fourier et l'espace de Schwartz

Avant d'avoir des résultats sur L^2, définissons l'**espace de Schwartz** $\mathscr{S} \subset L^2(\mathbb{R})$, sur lequel on aura

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot}: \quad \mathscr{S} &\to \mathscr{S} && (7) \\ h &\mapsto \widehat{h} && (8) \end{aligned}$$

qui sera une bijection, facile à inverser. Pour cela, il faudra que la formule d'inversion soit encore valide, et donc que les fonctions de cet espace soient à la fois intégrables et de transformée de Fourier intégrables.

La bonne classe de fonctions cherchée est celle des fonctions qui sont d'une part très régulières, d'autre part qui décroissent très vite vers 0. Cette dernière notion est précisée dans la définition suivante.

Definition

On appelle **fonction à décroissance rapide** une fonction h vérifiant

$$\lim_{|t|\to+\infty} \left|t^k h(t)\right| = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

Ainsi, h décroît plus vite que toute puissance de t.

Definition

On appelle **fonction à décroissance rapide** une fonction h vérifiant

$$\lim_{|t|\to+\infty} \left|t^k h(t)\right| = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

Ainsi, h décroît plus vite que toute puissance de t.

Definition

On appelle **fonction à décroissance rapide** une fonction h vérifiant

$$\lim_{|t|\to+\infty} \left|t^k h(t)\right| = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

Ainsi, h décroît plus vite que toute puissance de t. On a alors, le théorème suivant.

Théorème

Si h est une fonction intégrable à décroissance rapide, alors $\widehat{h}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, si h est une fonction intégrable $\mathscr{C}^\infty$, et si $\forall k \in \mathbb{N}$, $h^{(k)}$ est intégrable, alors $\widehat{h}$ est à décroissance rapide.

Definition

On appelle **fonction à décroissance rapide** une fonction h vérifiant

$$\lim_{|t|\to+\infty} \left|t^k h(t)\right| = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

Ainsi, h décroît plus vite que toute puissance de t. On a alors, le théorème suivant.

Théorème

Si h est une fonction intégrable à décroissance rapide, alors $\widehat{h}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, si h est une fonction intégrable $\mathscr{C}^\infty$, et si $\forall k \in \mathbb{N}$, $h^{(k)}$ est intégrable, alors $\widehat{h}$ est à décroissance rapide.

Definition

On appelle **fonction à décroissance rapide** une fonction h vérifiant

$$\lim_{|t| \to +\infty} \left| t^k h(t) \right| = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

Ainsi, h décroît plus vite que toute puissance de t. On a alors, le théorème suivant.

Théorème

Si h est une fonction intégrable à décroissance rapide, alors $\widehat{h}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, si h est une fonction intégrable $\mathscr{C}^\infty$, et si $\forall k \in \mathbb{N}$, $h^{(k)}$ est intégrable, alors $\widehat{h}$ est à décroissance rapide.

Nous pouvons maintenant définir l'espace que nous cherchions.

Definition

On appelle **fonction à décroissance rapide** une fonction h vérifiant

$$\lim_{|t|\to+\infty} \left| t^k h(t) \right| = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

Ainsi, h décroît plus vite que toute puissance de t. On a alors, le théorème suivant.

Théorème

Si h est une fonction intégrable à décroissance rapide, alors $\widehat{h}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, si h est une fonction intégrable $\mathscr{C}^\infty$, et si $\forall k \in \mathbb{N}$, $h^{(k)}$ est intégrable, alors $\widehat{h}$ est à décroissance rapide.

Nous pouvons maintenant définir l'espace que nous cherchions.

Definition

On appelle **espace de Schwartz**, et on le note $\mathscr{S}$, l'espace des fonctions qui sont $\mathscr{C}^\infty$ à décroissance rapide, ainsi que toutes leurs dérivées.

Remarque

(a) Toute fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support borné est dans $\mathscr{S}$.

Remarque

(a) Toute fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support borné est dans $\mathscr{S}$.
(b) La fonction $h(t) = e^{-t^2}$ est dans $\mathscr{S}$.

Remarque

(a) Toute fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support borné est dans $\mathscr{S}$.
(b) La fonction $h(t) = e^{-t^2}$ est dans $\mathscr{S}$.
(c) $\mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Remarque

(a) Toute fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support borné est dans $\mathscr{S}$.
(b) La fonction $h(t) = e^{-t^2}$ est dans $\mathscr{S}$.
(c) $\mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
On a alors le résultat de stabilité important suivant.

Théorème (Théoroeme Parseval-Plancherel)

La transformation de Fourier $\widehat{.}$ définit une isométrie bijective de $\mathscr{S}$ sur lui-même : si $h, g \in \mathscr{S}$, on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}} h(t)\overline{g(t)}dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\nu)\overline{\widehat{g}(\nu)}d\nu \tag{10}$$

En particulier, en prenant $h = g$, nous avons

$$\|h\|_2 = \left\|\widehat{h}\right\|_2 \qquad \textbf{\textit{Formule de Plancherel-Parseval}} \tag{11}$$

Théorème (Théoroeme Parseval-Plancherel (suite))

De plus, toute fonction $h \in \mathscr{S}$ vérifie la formule d'inversion de la transformée de Fourier :

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu, \forall t \in \mathbb{R} \tag{12}$$

Pour toute fonction $h \in \mathscr{S}$, on a :

$$\frac{d^p}{d\nu^p}\widehat{h}(\nu) = (-2i\pi)^p \int_{\mathbb{R}} t^p h(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = (-2i\pi)^p \widehat{t^p h}(\nu), \quad \forall p \geq 0$$

$$\widehat{h^{(p)}}(\nu) = (2i\pi\nu)^p \widehat{h}(\nu), \quad \forall p \geq 0$$

Transformée de Fourier dans L^2

Nous prolongeons à $L^2(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier définie sur $\mathscr{S}$.

Transformée de Fourier dans L^2

Nous prolongeons à $L^2(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier définie sur $\mathscr{S}$.
On peut car $\mathscr{S} \subset L^2(\mathbb{R})$, et surtout car :

Lemma

L'espace $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\mathbb{R})$.

Transformée de Fourier dans L^2

Nous prolongeons à $L^2(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier définie sur $\mathscr{S}$.
On peut car $\mathscr{S} \subset L^2(\mathbb{R})$, et surtout car :

Lemma

L'espace $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\mathbb{R})$.

Transformée de Fourier dans L^2

Nous prolongeons à $L^2(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier définie sur $\mathscr{S}$. On peut car $\mathscr{S} \subset L^2(\mathbb{R})$, et surtout car :

Lemma

L'espace $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\mathbb{R})$.

Ce qui veut dire qu'on peut approcher toute fonction $h \in L^2(\mathbb{R})$, en norme $\|.\|_2$, par une fonction $\varphi \in \mathscr{S}$. On utilise ensuite le fait que

- $\mathscr{S}$ est dense dans L^2,

pour montrer que la transformée de Fourier sur $\mathscr{S}$ se **prolonge** en un opérateur de L^2 dans L^2 qui reste linéaire et continu. (Plus précisément, soit $h \in L^2(\mathbb{R})$, dont on veut sa transformée de Fourier. On sait que $h = \lim_n h_n$ où (h_n) est une suite de fonctions de $\mathscr{S}$. On définit alors $\widehat{h}$ par $\lim_n \widehat{h}_n$. On sait que cette limite existe et qu'elle est dans L^2 (car L^2 est complet et on peut montrer que $\widehat{h}_n$ est une suite de Cauchy). De plus, comme $\|h_n\|_2 = \|\widehat{h}_n\|_2$ pour tout n, on a aussi $\|h\|_2 = \|\widehat{h}\|_2$.)

Transformée de Fourier dans L^2

Nous prolongeons à $L^2(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier définie sur $\mathscr{S}$. On peut car $\mathscr{S} \subset L^2(\mathbb{R})$, et surtout car :

Lemma

L'espace $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\mathbb{R})$.

Ce qui veut dire qu'on peut approcher toute fonction $h \in L^2(\mathbb{R})$, en norme $\|.\|_2$, par une fonction $\varphi \in \mathscr{S}$. On utilise ensuite le fait que

- $\mathscr{S}$ est dense dans L^2,
- L^2 est complet,

pour montrer que la transformée de Fourier sur $\mathscr{S}$ se **prolonge** en un opérateur de L^2 dans L^2 qui reste linéaire et continu. (Plus précisément, soit $h \in L^2(\mathbb{R})$, dont on veut sa transformée de Fourier. On sait que $h = \lim_n h_n$ où (h_n) est une suite de fonctions de $\mathscr{S}$. On définit alors $\widehat{h}$ par $\lim_n \widehat{h}_n$. On sait que cette limite existe et qu'elle est dans L^2 (car L^2 est complet et on peut montrer que $\widehat{h}_n$ est une suite de Cauchy). De plus, comme $\|h_n\|_2 = \|\widehat{h}_n\|_2$ pour

En conclusion, on se retrouve après ces étapes, avec un opérateur "transformation de Fourier" défini pour toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$, à valeur dans $L^2(\mathbb{R})$.

En conclusion, on se retrouve après ces étapes, avec un opérateur "transformation de Fourier" défini pour toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$, à valeur dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème

Soit $h \in L^2(\mathbb{R})$.

Si h est continue, de classe C^1 par morceaux et telle que $h' \in L^2(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $\nu \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{h'}(\nu) = 2i\pi\nu\widehat{h}(\nu).$$

Si de plus, h est de classe C^m par morceaux, ou $m \in \mathbb{N}^*$ et telle que les dérivées $h^{(k)}$ jusqu'à l'ordre m inclus sont de carré intégrables, alors pour presque tout $\nu \in \mathbb{R}$ et pour tout $1 \leq k \leq m$, on a

$$\widehat{h^{(k)}}(\nu) = (2i\pi\nu)^k\widehat{h}(\nu).$$

La définition de la transformation de Fourier sur L^1, et la définition de la transformation de Fourier sur L^2 par prolongement sont *a priori* différentes. Toutefois, nous avons le résultat réconfortant suivant.

La définition de la transformation de Fourier sur L^1, et la définition de la transformation de Fourier sur L^2 par prolongement sont *a priori* différentes. Toutefois, nous avons le résultat réconfortant suivant.

Proposition

La transformée de Fourier sur L^1 et celle sur L^2 coïncident sur $L^1 \cap L^2$.

Par conséquent, si h est une fonction intégrable et de carré intégrable, alors sa transformée de Fourier est

$$\widehat{h} : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(t)\, e^{-2i\pi f t} dt \tag{13}$$

Transformée de Fourier et convolution

Rappelons la définition du produit de convolution de deux fonctions.

Definition

Si f et g sont deux fonctions intégrables, leur produit de convolution, lorsqu'il existe est $h = f * g$ avec

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt \tag{14}$$

La transformée de Fourier échange la convolution et la multiplication :

Théorème

Soient h et g deux fonctions admettant des transformées de Fourier et telles que leur produit de convolution existe et est intégrable. Alors, nous avons :

$$\widehat{[h * g]} = \widehat{h}\widehat{g} \tag{15}$$

et lorsque ces expressions sont définies

$$\widehat{[hg]} = \widehat{h} * \widehat{g} \tag{16}$$

- Le théorème de convolution est très utile pour résoudre des équations linéaires où figure un noyau ω, par exemple $h(x) = \phi(x) + \int_{\mathbb{R}} \omega(x-y)h(y)dy$. Une telle équation dit que la valeur de h au point x est conditionnée par les valeurs de h en d'autre points y dont l'importance est pondérée par $\omega(x-y)$. Si x est le temps, on parle de système à mémoire. Si x est l'espace, on parle de système avec interactions.

- Le théorème de convolution est très utile pour résoudre des équations linéaires où figure un noyau ω, par exemple $h(x) = \phi(x) + \int_{\mathbb{R}} \omega(x-y)h(y)dy$. Une telle équation dit que la valeur de h au point x est conditionnée par les valeurs de h en d'autre points y dont l'importance est pondérée par $\omega(x-y)$. Si x est le temps, on parle de système à mémoire. Si x est l'espace, on parle de système avec interactions.

- Le théorème de convolution est très utile pour résoudre des équations linéaires où figure un noyau ω, par exemple $h(x) = \phi(x) + \int_{\mathbb{R}} \omega(x-y)h(y)dy$. Une telle équation dit que la valeur de h au point x est conditionnée par les valeurs de h en d'autre points y dont l'importance est pondérée par $\omega(x-y)$. Si x est le temps, on parle de système à mémoire. Si x est l'espace, on parle de système avec interactions.
- La convolution de deux gaussiennes reste une gaussienne

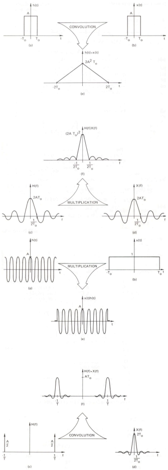

Figure – Illustration graphique du théorème de convolution.

Validité de la formule de convolution

On peut montrer que la formule de convolution $\widehat{[h*g]} = \widehat{h}\widehat{g}$ est vraie lorsque :

i) $h \in L^1$, $g \in L^1$: $\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$

Validité de la formule de convolution

On peut montrer que la formule de convolution $\widehat{[h * g]} = \widehat{h}\widehat{g}$ est vraie lorsque :

i) $h \in L^1$, $g \in L^1$: $\widehat{[h * g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$.

Validité de la formule de convolution

On peut montrer que la formule de convolution $\widehat{[h * g]} = \widehat{h}\widehat{g}$ est vraie lorsque :

i) $h \in L^1$, $g \in L^1$: $\widehat{[h * g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$.

ii) $h \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $h * g \in L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h * g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}$.

Validité de la formule de convolution

On peut montrer que la formule de convolution $\widehat{[h*g]} = \widehat{h}\widehat{g}$ est vraie lorsque :

i) $h \in L^1$, $g \in L^1$: $\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$

ii) $h \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $h*g \in L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}.$

Validité de la formule de convolution

On peut montrer que la formule de convolution $\widehat{[h*g]} = \widehat{h}\widehat{g}$ est vraie lorsque :

i) $h \in L^1$, $g \in L^1$: $\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$

ii) $h \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $h*g \in L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}.$

iii) $h \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}.$

Validité de la formule de convolution

On peut montrer que la formule de convolution $\widehat{[h*g]} = \widehat{h}\widehat{g}$ est vraie lorsque :

i) $h \in L^1$, $g \in L^1$: $\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$

ii) $h \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $h*g \in L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}.$

iii) $h \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}.$

Validité de la formule de convolution

On peut montrer que la formule de convolution $\widehat{[h*g]} = \widehat{h}\widehat{g}$ est vraie lorsque :

i) $h \in L^1$, $g \in L^1$: $\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$.

ii) $h \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $h*g \in L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}$.

iii) $h \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}$.

On peut montrer que la formule $\widehat{[hg]} = \widehat{h}*\widehat{g}$ est vraie lorsque :

iv) h et g sont dans L^1 et que leurs transformées de Fourier sont également dans L^1,

Validité de la formule de convolution

On peut montrer que la formule de convolution $\widehat{[h*g]} = \widehat{h}\widehat{g}$ est vraie lorsque :

i) $h \in L^1$, $g \in L^1$: $\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$

ii) $h \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $h*g \in L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}.$

iii) $h \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}.$

On peut montrer que la formule $\widehat{[hg]} = \widehat{h} * \widehat{g}$ est vraie lorsque :

iv) h et g sont dans L^1 et que leurs transformées de Fourier sont également dans L^1,

Validité de la formule de convolution

On peut montrer que la formule de convolution $\widehat{[h*g]} = \widehat{h}\widehat{g}$ est vraie lorsque :

i) $h \in L^1$, $g \in L^1$: $\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$.

ii) $h \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $h*g \in L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}$.

iii) $h \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}$.

On peut montrer que la formule $\widehat{[hg]} = \widehat{h} * \widehat{g}$ est vraie lorsque :

iv) h et g sont dans L^1 et que leurs transformées de Fourier sont également dans L^1,

v) h et g sont dans L^2.

Validité de la formule de convolution

On peut montrer que la formule de convolution $\widehat{[h*g]} = \widehat{h}\widehat{g}$ est vraie lorsque :

i) $h \in L^1$, $g \in L^1$: $\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$.

ii) $h \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $h*g \in L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}$.

iii) $h \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}$.

On peut montrer que la formule $\widehat{[hg]} = \widehat{h}*\widehat{g}$ est vraie lorsque :

iv) h et g sont dans L^1 et que leurs transformées de Fourier sont également dans L^1,

v) h et g sont dans L^2.

Validité de la formule de convolution

On peut montrer que la formule de convolution $\widehat{[h*g]} = \widehat{h}\widehat{g}$ est vraie lorsque :

i) $h \in L^1$, $g \in L^1$: $\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$.

ii) $h \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $h*g \in L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}$.

iii) $h \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$:
$\widehat{[h*g]}(\nu) = \widehat{h}\widehat{g}(\nu), \quad \text{pour presque tout } \nu \in \mathbb{R}$.

On peut montrer que la formule $\widehat{[hg]} = \widehat{h} * \widehat{g}$ est vraie lorsque :

iv) h et g sont dans L^1 et que leurs transformées de Fourier sont également dans L^1,

v) h et g sont dans L^2.

Et dans l'un ou l'autre de ces deux cas, on a :

$$\widehat{[hg]}(\nu) = (\widehat{h} * \widehat{g})(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Application des intégrales de Fourier aux E.D.P. : Résolution de l'équation de la chaleur.

Etude de l'évolution de la température à l'intérieur d'une tige rectiligne, homogène, de section petite par rapport à la longueur que l'on suppose **infinie** (une tige semi-infinie).

Application des intégrales de Fourier aux E.D.P. : Résolution de l'équation de la chaleur.

Etude de l'évolution de la température à l'intérieur d'une tige rectiligne, homogène, de section petite par rapport à la longueur que l'on suppose **infinie** (une tige semi-infinie).
On note $u(x,t)$ la température de la tige en l'abscisse x au temps $t > 0$. L'équation aux dérivées partielles associées à ce modèle est l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Application des intégrales de Fourier aux E.D.P. : Résolution de l'équation de la chaleur.

Etude de l'évolution de la température à l'intérieur d'une tige rectiligne, homogène, de section petite par rapport à la longueur que l'on suppose **infinie** (une tige semi-infinie).
On note $u(x,t)$ la température de la tige en l'abscisse x au temps $t > 0$. L'équation aux dérivées partielles associées à ce modèle est l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avec $a^2 = \frac{\lambda}{\rho c}$ où λ est la conductivité de la tige, ρ sa masse volumique et c sa chaleur spécifique.

On va résoudre ce problème dans le cas où la température est soumise à la condition initiale

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

où φ est une fonction bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$. On suppose u de classe $\mathscr{C}^2$ par rapport à x, et de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à t.

On note

$$\widehat{u}(\nu, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

la transformée de Fourier de u par rapport à la variable x.

On note

$$\widehat{u}(\nu, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

la transformée de Fourier de u par rapport à la variable x. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\nu, t) = a^2(2i\pi\nu)^2\widehat{u}(\nu, t) = -4a^2\pi^2\nu^2\widehat{u}(\nu, t)$$

Donc

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\nu, t) = -4a^2\pi^2\nu^2\widehat{u}(\nu, t)$$

Donc

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\nu, t) = -4a^2\pi^2\nu^2\widehat{u}(\nu, t)$$

qui a pour solution

$$\boxed{\widehat{u}(\nu, t) = Ke^{-4a^2\pi^2\nu^2 t}}$$

Donc

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\nu,t) = -4a^2\pi^2\nu^2\widehat{u}(\nu,t)$$

qui a pour solution

$$\boxed{\widehat{u}(\nu,t) = Ke^{-4a^2\pi^2\nu^2 t}}$$

avec pour $t=0$,

$$\widehat{u}(\nu,0) = K = \widehat{\varphi}(x)$$

Par conséquent

$$\boxed{\widehat{u}(\nu,t) = \widehat{\varphi}(x)e^{-4a^2\pi^2\nu^2 t} = \widehat{\varphi}(\nu)e^{-2\pi^2(2a^2t)\nu^2}}$$

On a

$$\widehat{u}(\nu,t)=\widehat{\varphi}(\nu)\boxed{e^{-2\pi^2(2a^2t)\nu^2}}$$

On a

$$\widehat{u}(\nu,t)=\widehat{\varphi}(\nu)\boxed{e^{-2\pi^2(2a^2t)\nu^2}}$$

Or $\mathscr{F}(e^{-\pi x^2})(\nu)=e^{-\pi\nu^2}$, donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}\left(e^{-2\pi^2(2a^2t)\nu^2}\right)(x) &= \mathscr{F}\left(e^{-2\pi^2(2a^2t)\nu^2}\right)(x) \quad \text{(parité)}\\
&= \mathscr{F}\left(e^{-\pi(2a\sqrt{\pi t}\nu)^2}\right)(x)\\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathscr{F}\left(e^{-\pi\nu^2}\right)\left(\frac{x}{2a\sqrt{\pi t}}\right)\\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}
\end{aligned}$$

Si on pose

$$h(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

donc

$$\widehat{u}(\nu, t) = \widehat{\varphi}(\nu)\widehat{h}(\nu)$$

Si on pose

$$h(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

donc

$$\widehat{u}(\nu, t) = \widehat{\varphi}(\nu)\widehat{h}(\nu)$$

On utilise la propriété $\mathscr{F}(F)\mathscr{F}(G) = \mathscr{F}(F * G)$, donc

$$\mathscr{F}(u(\cdot, t))(\nu) = \mathscr{F}(\varphi)(\nu)\mathscr{F}(h)(\nu) = \mathscr{F}(\varphi * h)(\nu)$$

Si on pose

$$h(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

donc

$$\widehat{u}(\nu, t) = \widehat{\varphi}(\nu)\widehat{h}(\nu)$$

On utilise la propriété $\mathscr{F}(F)\mathscr{F}(G) = \mathscr{F}(F * G)$, donc

$$\mathscr{F}(u(\cdot, t))(\nu) = \mathscr{F}(\varphi)(\nu)\mathscr{F}(h)(\nu) = \mathscr{F}(\varphi * h)(\nu)$$

L'injectivité de la transformée de Fourier nous permet de conclure que

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} ds.}$$