Séances 7-8

Analyse de Fourier

Exercice 1. [Egalité de Parseval]

1. Donner le développement en série de Fourier de la fonction f, de période $T = 2$, définie sur $[0; 2[$ par

$$\begin{array}{ll} f(x) = 1, & x \in [0;1[\\ f(x) = 0, & x \in [1;2[\end{array}$$

2. Que vous donne l'égalité de Parseval ?

Exercice 2. [Intégration d'une série de Fourier]

1. Donner le développement en série de Fourier du signal carré

$$\begin{cases} f(x) = 1, & x \in [0; T/2[\\ f(x) = -1, & x \in [T/2; T[\end{cases}$$

2. Qu'obtenez-vous en intégrant ?

Exercice 3. [Développement en série de Fourier]

Développer en série de Fourier la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x, & \text{pour } -\pi \le x < 0, \\ \sin x, & \text{pour } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

Dans quel sens la série de Fourier converge-t-elle ?

Exercice 4. [Equation de la corde vibrante]

Soient $c, L > 0$, $f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$, des fonction de classe $\mathcal{C}^3$, telles que $f(0) = f(L) = 0$, $g(0) = g(L) = 0$. On souhaite trouver $u = u(x,t)$ solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0, L) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & x \in (0, L) \end{cases}$$

en utilisant les séries de Fourier.

(1) Montrer la solution du problème sous la forme $u(x,t) = v(x)w(t)$, en ignorant les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$ et $u_t(x,0) = g(x)$, est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

(2) Avec des développements en série de Fourier bien choisis, déterminer les constantes a_n et b_n en utilisant les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$ et $u_t(x,0) = g(x)$.
En déduire la solution générale du problème.

(3) Discuter le cas particulier où $f = 0$ et $g(x) = \sin(\frac{\pi}{L}x) - \sin(\frac{2\pi}{L}x)$.

Exercice 5. On définit la fonction porte Π par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Rappeler la transformée de Fourier de Π et calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = \Pi\left(\frac{x - 1/2}{a}\right), \text{ pour } a > 0.$$

Exercice 6. (1) On veut calculer la transformée de Fourier de la fonction g telle que : $g(x) = e^{-x^2}$. Déduire $\widehat{g}$, en utilisant le fait que g est solution d'une équation différentielle. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

(2) Pour $a > 0$, calculer la transformée de Fourier de la gaussienne définie par

$$g_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

Exercice 7. On considère la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-|t|}$.

(a) La fonction f appartient-elle à $L^1(\mathbb{R})$? à $L^2(\mathbb{R})$?

(b) Calculer les normes $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$.

(c) Déterminer la transformée de Fourier de f.

(d) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ par application du théorème de Parseval-Plancherel.

Exercice 8. [Convolution de Fonctions de Cauchy]

On considère la fonction de Cauchy définie par $C_a(t) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+t^2}$ où $a > 0$ est un réel.

(a) Calculer la transformée de Fourier de C_a. Cette transformée de Fourier est-elle un élément de $L^1(\mathbb{R})$.

(b) Montrer en utilisant le théorème de convolution que, pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $C_\alpha * C_\beta = C_{\alpha+\beta}$.

Exercice 9. Soient $a \neq 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et $\widehat{f}$ sont L^1. On cherche $u = u(x,t)$ solution de l'équation d'évolution (équation de la chaleur)

$$\begin{cases} \partial_t u = a^2 \partial_x^2 u, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Utiliser pour cela la transformation de Fourier. On traitera ensuite explicitement le cas classique où $f(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 10. Soit le domaine $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; y > 0\}$. Résoudre,

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = \dfrac{2}{1+4\pi^2 x^2} \\ \lim\limits_{y \to +\infty} u(x,y) = 0 \end{cases}$$

On pourra utiliser la transformée de Fourier de la fonction $u = u(x,y)$ par rapport à la variable x.