Séances 7-8
Analyse de Fourier

Exercice 1. [Egalité de Parseval]

1. Donner le développement en série de Fourier de la fonction f, de période $T = 2$, définie sur $[0; 2[$ par

$$\begin{array}{ll} f(x) = 1, & x \in [0;1[\\ f(x) = 0, & x \in [1;2[\end{array}$$

2. Que vous donne l'égalité de Parseval ?

Corrigé l'exercice 1. Le développement en série de Fourier est

$$f(x) = 1/2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin\left((2n+1)\pi x\right).$$

La fonction est C^1 par morceaux, il y a convergence simple vers la régularisée de f par le théorème de Dirichlet, ce qui donne convergence de la série sauf aux nombres entiers où la série converge vers $1/2$. En particulier, l'égalité écrite au-dessus est vraie pour tout $x \notin \mathbb{Z}$.

La formule de Parseval donne ici

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 2. [Intégration d'une série de Fourier]

1. Donner le développement en série de Fourier du signal carré

$$\begin{cases} f(x) = 1, & x \in [0; T/2[\\ f(x) = -1, & x \in [T/2; T[\end{cases}$$

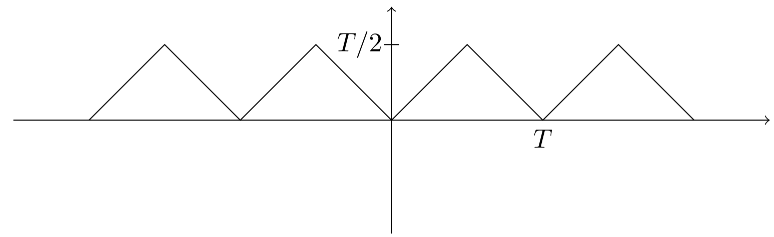
2. Qu'obtenez-vous en intégrant ?

Corrigé l'exercice 2. Si f désigne toujours la fonction précédente on a $g(x) = 2f(2x/T) - 1$ et donc le développement en série de Fourier est

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin\left(\frac{2(2n+1)\pi x}{T}\right).$$

De nouveau, l'égalité est vraie pour tout $x \notin \mathbb{Z}T$.

Soit G la primitive de g qui s'annule en 0. C'est une fonction continue et C^1 par morceaux. On a donc convergence uniforme de la série de Fourier de G vers G et on a facilement le graphe de G.



Avec la relation $c_n(g) = \frac{2in\pi}{T} c_n(G)$ (pour $n \neq 0$) vue en cours, on a que le développement de Fourier de G s'obtient (formellement) à partir de celui de g en intégrant termes à termes (et en calculant le terme pour $n = 0$). Ainsi,

$$G(x) = \frac{T}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2T}{\pi^2(2n+1)^2} \cos\left(\frac{2(2n+1)\pi x}{T}\right)$$

Exercice 3. [Développement en série de Fourier]

Développer en série de Fourier la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x, & \text{pour } -\pi \leq x < 0, \\ \sin x, & \text{pour } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Dans quel sens la série de Fourier converge-t-elle ?

Corrigé l'exercice 3. La fonction est paire C^1 par morceaux, continue et 2π-périodique. On le développement de Fourier avec convergence uniforme suivant :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 4. [Equation de la corde vibrante]

Soient $c, L > 0,\ f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$, des fonction de classe $\mathcal{C}^3$, telles que $f(0) = f(L) = 0$, $g(0) = g(L) = 0$. On souhaite trouver $u = u(x,t)$ solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0, L) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & x \in (0, L) \end{cases}$$

en utilisant les séries de Fourier.

(1) Montrer la solution du problème sous la forme $u(x,t) = v(x)w(t)$, en ignorant les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$ et $u_t(x,0) = g(x)$, est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

(2) Avec des développements en série de Fourier bien choisis, déterminer les constantes a_n et b_n en utilisant les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$ et $u_t(x,0) = g(x)$.
En déduire la solution générale du problème.

(3) Discuter le cas particulier où $f = 0$ et $g(x) = \sin(\frac{\pi}{L}x) - \sin(\frac{2\pi}{L}x)$.

Corrigé l'exercice 4. On utilise la méthode de séparation des variables et on pose $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$. Alors l'équation devient

$$\psi''(t)\varphi(x) = c^2\psi(t)\varphi''(x)$$

On divise formellement par $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}$$

Comme le membre de gauche ne dépends que de x et le membre de droite ne dépends que de t on en déduit qu'ils sont constants, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = -\lambda$$

d'où

$$\varphi''(x) = -\lambda\varphi(x) \tag{1}$$

$$\psi''(t) = -c^2\lambda\psi(t) \tag{2}$$

On obtient alors deux équations à variables séparées.

On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = -\lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \end{cases}$$

Les solutions dépendent de la constantes λ.

– Si $-\lambda > 0$ alors les solutions de l'équation différentielle sont

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{\sqrt{-\lambda}x}$$

Si on cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 \quad &\Rightarrow A + B = 0 \\ \varphi(L) = 0 \quad &\Rightarrow A(e^{L\sqrt{-\lambda}} - e^{L\sqrt{-\lambda}}) = 0 \\ &\Rightarrow 2A\sinh(2\sqrt{\lambda}) = 0 \\ &\Rightarrow A = B = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solutions non nulles dans ce cas.

Si $\lambda = 0$ alors

$$\varphi(x) = Ax + B$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 \quad &\Rightarrow B = 0 \\ \varphi(3) = 0 \quad &\Rightarrow 3A = 0 \\ &\Rightarrow A = B = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solutions non nulles dans ce cas non plus.

Si $-\lambda < 0$, alors

$$\varphi(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 \quad &\Rightarrow B = 0 \\ \varphi(L) = 0 \quad &\Rightarrow A\sin(L\sqrt{\lambda}) = 0 \\ &\Rightarrow \text{ou bien } A = 0 \text{ ou bien } L\sqrt{\lambda} = n\pi,\ n > 0 \text{ entier} \end{aligned}$$

Il existe donc des solutions non nulles dans ce cas qui sont

$$\varphi_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{L}x), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

associées aux valeurs de λ suivantes

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

La suite des φ_n est une base sur laquelle on va pouvoir développer la solution en la projetant grâce au produit scalaire.

On résout l'équation en $\phi(t)$ pour mes valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale.

$$\psi_n'(t) = -c^2\lambda_n\psi(t)$$

qui a pour solutions

$$\psi_n(t) = \alpha_n \sin(\frac{n\pi c}{L}t) + \beta_n \cos(\frac{n\pi c}{L}t)$$

A ce stade, les fonctions

$$\psi_n(t)\varphi_n(x)$$

sont solutions de l'E.D.P. et des conditions aux limites mais pas de la condition initiale.

L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation. On écrit donc la solution $u(x,t)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

(2) Il faut maintenant déterminer les coefficients $c\alpha_n, \beta_n$ pour que la solutions $u(x,t)$ vérifie les conditions initiales qui s'écrivent

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

et

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\frac{n\pi c}{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Donc α_n est le coefficient de Fourier de f et β_n celui de g

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy$$

et

$$\beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy$$

(3) Dans le cas particulier $f(x) = 0$ et $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$, on trouve

$$\alpha_n = 0,\ \ \forall n$$

et

$$\beta_n = 0,\ \ \forall n \geq 3,\ \ \beta_1\frac{\pi c}{L} = 1,\ \beta_2\frac{2\pi c}{L} = -1$$

D'où

$$u(x,t) = \frac{L}{\pi c}\sin\left(\frac{\pi c}{L}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) - \frac{L}{2\pi c}\sin\left(\frac{2\pi c}{L}t\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right).$$

Exercice 5. On définit la fonction porte Π par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Rappeler la transformée de Fourier de Π et calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = \Pi\left(\frac{x-1/2}{a}\right),\ \text{pour } a > 0.$$

Corrigé l'exercice 5. On a vu en cours que la transformée de Fourier de Π est le sinus cardinal $\nu \mapsto \frac{sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$. Avec les formules de changement d'échelle et de translation, on obtient $\hat{f}(\nu) = e^{-i\pi\nu}\frac{sin(a\pi\nu)}{\pi\nu}$ pour $\nu \neq 0$ et a pour $\nu = 0$.

En effet $f(x) = g(x-1/2)$où $g(x) = \Pi(x/a)$. Ainsi $\hat{f}(\nu) = e^{-i\pi\nu}\hat{g}(\nu)$ et $\hat{g}(\nu) = a\hat{\Pi}(a\nu)$.

Exercice 6. (1) On veut calculer la transformée de Fourier de la fonction g telle que : $g(x) = e^{-x^2}$. Déduire $\widehat{g}$, en utilisant le fait que g est solution d'une équation différentielle. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

(2) Pour $a > 0$, calculer la transformée de Fourier de la gaussienne définie par

$$g_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

Corrigé l'exercice 6. (1) Le cours nous dit que comme g et $x \mapsto xg(x)$ sont L^1, on a que $\hat{g}$ est C^1 et $\hat{g}'(\nu) = -2i\pi\hat{h}(\nu)$ où $h(x) = xg(x)$. Maintenant, une intégration par parties montre que $\hat{h}(\nu) = -i\pi\nu\hat{g}(\nu)$. Ainsi, $\hat{g}$ est solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients non-constants d'ordre 1 :

$$\hat{g}'(\nu) = -2\pi^2\nu\hat{g}(\nu).$$

Ainsi $\hat{g}(\nu) = \hat{g}(0)e^{-\pi^2\nu^2}$ et avec l'indication $\hat{g}(0) = \sqrt{\pi}$.

(2) On a $g_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} g\left(\frac{x}{\sqrt{2}a}\right)$. Ainsi $\hat{g}_a(\nu) = \frac{\sqrt{2}a}{a\sqrt{2\pi}}\hat{g}(\sqrt{2}a\nu) = e^{-2a^2\pi^2\nu^2}$.

Exercice 7. On considère la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-|t|}$.

(a) La fonction f appartient-elle à $L^1(\mathbb{R})$? à $L^2(\mathbb{R})$?

(b) Calculer les normes $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$.

(c) Déterminer la transformée de Fourier de f.

(d) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ par application du théorème de Parseval-Plancherel.

Corrigé l'exercice 7. (a) $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

(b) $\|f\|_1 = 2$, $\|f\|_2 = 1$.

(c) On trouve $\mathcal{F}f(\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$. (d) D'après la formule de Plancherel, $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(1+4\pi^2\nu^2)^2} d\nu = 1$. Un changement de variable ($x = 2\pi\nu$) donne $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \pi/2$.

Exercice 8. [Convolution de Fonctions de Cauchy]

On considère la fonction de Cauchy définie par $C_a(t) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+t^2}$ où $a > 0$ est un réel.

(a) Calculer la transformée de Fourier de C_a. Cette transformée de Fourier est-elle un élément de $L^1(\mathbb{R})$.

(b) Montrer en utilisant le théorème de convolution que, pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $C_\alpha * C_\beta = C_{\alpha+\beta}$.

Corrigé l'exercice 8. (a) $C_a \in L^1(\mathbb{R}, dt)$, $\mathcal{F}(C_a)(\nu) = e^{-2\pi a|\nu|} \in L^1(\mathbb{R}, d\nu)$.

(b) Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(C_\alpha * C_\beta) &= \mathcal{F}(C_\alpha)\mathcal{F}(C_\beta) \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \\
&= e^{-2\pi(\alpha+\beta)|\nu|} \\
&= \mathcal{F}(C_{\alpha+\beta})
\end{aligned}$$

D'où $C_\alpha * C_\beta = C_{\alpha+\beta}$.

Exercice 9. Soient $a \neq 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et $\widehat{f}$ sont L^1. On cherche $u = u(x,t)$ solution de l'équation d'évolution (équation de la chaleur)

$$\begin{cases} \partial_t u = a^2 \partial_x^2 u, \quad x \in \mathbb{R}, \, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3}$$

Utiliser pour cela la transformation de Fourier. On traitera ensuite explicitement le cas classique où $f(x) = e^{-x^2}$.

Corrigé l'exercice 9. Il s'agit d'étudier de l'évolution de la température à l'intérieur d'une tige rectiligne, homogène, de section petite par rapport à la longueur que l'on suppose **infinie** (une tige semi-infinie).

On note $u(x,t)$ la température de la tige en l'abscisse x au temps $t > 0$. L'équation aux dérivées partielles associées à ce modèle est l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

(avec $a^2 = \frac{\lambda}{\rho c}$ où λ est la conductivité de la tige, ρ sa masse volumique et c sa chaleur spécifique).

On va résoudre ce problème dans le cas où la température est soumise à la condition initiale

$$u(x,0) = f(x)$$

où f est une fonction bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$. On suppose u de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x, et de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t. On note

$$\widehat{u}(\nu,t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)e^{-2i\pi\nu x} dx$$

la transformée de Fourier de u par rapport à la variable x. On a alors

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\nu,t) \quad = \int \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-2i\pi\nu x} dx = \mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t))(\nu,t)$$

En prenant la transformée de Fourier (en x) des deux membre de l'équation 4 on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t))(\nu,t) &= a^2 \mathcal{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t))(\nu,t) \\
&= a^2(2i\pi\nu)^2 \mathcal{F}(u(x,t))(\nu,t)
\end{aligned}$$

D'où l'équation différentielle du premier ordre dans la variable t

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\nu,t) = -4a^2\pi^2\nu^2 \widehat{u}(\nu,t)$$

et

$$\widehat{u}(\nu,t) = Ke^{-4a^2\pi^2\nu^2 t}$$

avec pour $t = 0$,

$$\widehat{u}(\nu,0) = K = \widehat{f}(\nu)$$

Par conséquent

$$\widehat{u}(\nu,t) = \widehat{f}(\nu)e^{-4a^2\pi^2\nu^2 t}$$

On applique alors la transformée de Fourier inverse pour obtenir

$$u(x,t) = \int \widehat{f}(\nu)e^{-4a^2\pi^2\nu^2 t}e^{2i\pi\nu x}d\nu. \tag{5}$$

On peut aussi remarquer que

$$\widehat{u}(\nu,t) = \widehat{f}(\nu)e^{-4a^2\pi^2\nu^2 t} = \widehat{f}(\nu)e^{-2\pi^2(2a^2t)\nu^2}$$

On reconnaît $e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}$ avec $\sigma = a\sqrt{2}t$. C'est $\mathcal{F}(h)(\nu)$ où

$$h(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

On utilise la propriété $\mathcal{F}(F)\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(F * G)$, donc

$$\mathcal{F}(u(\cdot,t))(\nu) = \mathcal{F}(f)(\nu)\mathcal{F}(h)(\nu) = \mathcal{F}(f*h)(\nu)$$

L'injectivité de la transformée de Fourier nous permet de conclure que

$$(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}ds.$$

Supposons maintenant que f est la gaussienne $f(x) = e^{-x^2}$. D'après l'exercice 6, Sa transformée de Fourier est $\widehat{f}(\nu) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\nu^2}$. Donc d'après (5), on a

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int \widehat{f}(\nu)e^{-4a^2\pi^2\nu^2 t}e^{2i\pi\nu x}d\nu \\
&= \sqrt{\pi}\int e^{-\pi^2\nu^2}e^{-4a^2\pi^2\nu^2 t}e^{2i\pi\nu x}d\nu \\
&= \sqrt{\pi}\int e^{-2\pi^2\nu^2(1/2+2a^2t)}e^{2i\pi\nu x}d\nu \\
&= \sqrt{\pi}\mathcal{F}(e^{-2\pi^2\nu^2(1/2+2a^2t)})(-x)
\end{aligned}$$

et donc toujours d'après l'exercice 6, on trouve

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1/2+2a^2t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2(1/2+2a^2t)} = \frac{e^{-x^2/(1+4a^2t)}}{\sqrt{1+4a^2t}}$$

Exercice 10. Soit le domaine $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ y>0\}$. Résoudre,

$$\begin{cases}
\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y)\in\Omega \\
u(x,0) = \dfrac{2}{1+4\pi^2x^2} \\
\lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y) = 0
\end{cases}$$

On pourra utiliser la transformée de Fourier de la fonction $u = u(x,y)$ par rapport à la variable x.

Corrigé l'exercice 10. Soit $\varphi(\nu,y) = \mathcal{F}(u(\cdot,y))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} u(x,y)e^{2i\pi\nu x}dx$ transformée de Fourier en par rapport à la variable x.

Pour $y=0$, $u(x,0) = f(x) = \frac{2}{1+4\pi^2x^2}$ et on a $\varphi(\nu,0) = \mathcal{F}[f](\nu) = e^{-|\nu|}$.

On a aussi

$$\begin{cases}
\mathcal{F}[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}](\nu,y) &= (2i\pi\nu)^2\varphi(\nu,y) = -4\pi^2\nu^2\varphi(\nu,y) \\
\mathcal{F}[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}](\nu,y) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(\nu,y)
\end{cases}$$

d"où le système

$$\begin{cases}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(\nu,y) - 4\pi^2\nu^2\varphi(\nu,y) = 0 & y>0 \\
\varphi(\nu,0) = e^{-|\nu|} & \\
\varphi(\nu,y)\to 0 & y\to+\infty
\end{cases}$$

La solution de cette équation différentielle est

$$\varphi(\nu,y) = Ae^{2\pi|\nu|y} + Be^{-2\pi|\nu|y}$$

avec les condition initiales on trouve $A+B = e^{-|\nu|}$ et $A=0$, donc $B = e^{-|\nu|}$, d'où

$$\varphi(\nu,y) = e^{-|\nu|}e^{-2\pi|\nu|y} = e^{-|\nu|(2\pi y+1)}$$

Par inversion de la transformée de Fourier on trouve

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}[\varphi(\nu,y)](x) \\
&= \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\nu|(2\pi y+1)}](x) \\
&= \mathcal{F}[e^{-|\nu|(2\pi y+1)}](x) \\
&= \tfrac{1}{1+2\pi y}\mathcal{F}[e^{-|\nu|}](\tfrac{x}{1+2\pi y}) \\
&= \tfrac{1}{1+2\pi y}\tfrac{2}{1+4\pi^2(\frac{x}{1+2\pi y})^2} \\
&= \tfrac{2(1+2\pi y)}{(1+2\pi y)^2+(2\pi x)^2}
\end{aligned}$$