Séances 6-7

Transformation de Laplace

Exercice 1. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} (a)\ t \mapsto t\sin at & (c)\ t \mapsto \int_0^t \frac{\sin u}{u} du & (e)\ t \mapsto \sin\sqrt{t} \\ (b)\ t \mapsto t^2 \cos at & (d)\ t \mapsto \int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du & (f)\ s \mapsto \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \end{array}$$

Exercice 2. Calculer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} (a)\ s \mapsto \frac{1}{\sqrt{2s+3}} & (c)\ s \mapsto \frac{s}{(s^2+a^2)^2}, (a \neq 0) \\ (b)\ s \mapsto \frac{s+1}{s^2+s+1} & (d)\ s \mapsto \frac{1}{s^3(s^2+1)} \end{array}$$

Exercice 3. (**Application de la transformée de Laplace aux Poutres en porte-à-faux**) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{\omega(x)}{\gamma}, \quad 0 \leq x \leq \ell$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(\ell) = 0, y'''(\ell) = 0$$

où $y(x)$ est la flèche (l'axe) en tout point x de la poutre. On suppose que la poutre de longueur ℓ est emboitée à son extrémité $x = 0$ et libre à son extrémité $x = \ell$ et qu'elle porte une charge $\omega(x)$ par unité de longueur donnée par

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_0 & 0 < x < \ell/2 \\ 0 & \ell/2 < x < \ell \end{cases}$$

ω_0 et γ étant des constantes.

Exercice 4. (**Application de la transformée de Laplace à l'équation de la chaleur**)

Résoudre l'équation de la chaleur suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(x, 0) = 3\sin 2\pi x, u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$$

Exercice 5. (**Application de la transformée de Laplace aux cordes vibrantes**)

Résoudre le problème de valeurs aux limites suivant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; x > 0, \; t > 0 \; (a > 0)$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = A_0 \sin\omega t, |u(x, t)| < M$$

où $u(x, t)$ est le déplacement transversal d'une corde (infiniment longue) en un point x à un temps t. On supposera qu'une extrémité se trouve en $x = 0$, se confond initialement dans l'axe des x. L'extrémité $x = 0$ est soumise à un mouvement transversal périodique d'amplitude $A_0 \sin\omega t$ $(t > 0)$.

Exercice 6. On cherche, en utilisant la transformée de Laplace, à résoudre l'équation différentielle

$$y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = t^2 e^t \qquad \text{(Equation 1)}$$

avec les conditions

$$y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2.$$

On pose $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$.

(1) Transformer l'Equation 1 et déduire que $Y(s)$ vérifie une équation algébrique de la forme $f(s)Y(s) + g(s) = h(s)$ où $f(s)$, $g(s)$ et $h(s)$ sont à déterminer.

(2) En utilisant la transformée de Laplace inverse, déterminer alors une solution de l'Equation 1.

Exercice 7. (**Application de la transformée de Laplace aux équations intégrales de type convolutif**)

Résoudre l'équation intégrale suivante

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(u)\sin(t - u)du$$

Exercice 8. (**Application de la transformée de Laplace aux équations aux différences**)

Résoudre l'équation aux différences suivante :

$$y'(t) + y(t - 1) = t^2$$

avec $y(t) = 0$ pout $t \leq 0$.