Séances 6-7

Transformation de Laplace

Exercice 1. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} (a)\ t \mapsto t\sin at & (c)\ t \mapsto \int_0^t \frac{\sin u}{u}du & (e)\ t \mapsto \sin\sqrt{t} \\ (b)\ t \mapsto t^2\cos at & (d)\ t \mapsto \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}du & (f)\ s \mapsto \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \end{array}$$

Corrigé l'exercice 1. (a) $f(t) = t\sin at$, $\mathcal{L}[f(t)](s) = (-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin at](s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$.

(b) $f(t) = t^2\cos at$, donc

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}[\cos at](s) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{2s^3-6a^2s}{(s^2+a^2)^3}$$

(c) $f(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}du$. On a $f(0) = 0$ et $f'(t) = \frac{\sin t}{t}$ ou encore $tf'(t) = \sin t$. Donc

$$\mathcal{L}[tf'(t)](s) = \mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1}$$

d'où

$$-\frac{d}{ds}(s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)) = \frac{1}{s^2+1}$$

c-à-d.

$$\frac{d}{ds}(s\mathcal{L}[f(t)](s) = -\frac{1}{s^2+1}$$

En intégrant on trouve

$$s\mathcal{L}[f(t)](s) = -\text{cotan}(s) + c$$

En utilisant le théorème de la valeur initiale on trouve $c = \pi/2$ et

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s}\text{cotan}(\frac{1}{s})$$

(d) $f(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}du$. On a $f'(t) = -\frac{\cos t}{t}$ ou encore $tf'(t) = -\cos t$. On raisonne de la même façon que la question précédente :

$$\mathcal{L}[tf'(t)](s) = \mathcal{L}[-\cos t](s) = -\frac{s}{s^2+1}$$

d'où

$$-\frac{d}{ds}(s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0^+)) = -\frac{s}{s^2+1}$$

En fait ici $f(0^+) = -\infty$, mais cela n'as pas d'effet par dérivation, donc

$$\frac{d}{ds}(s\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{s}{s^2+1}$$

En intégrant on trouve

$$s\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{2}\ln(s^2+1) + c$$

En utilisant le théorème de la valeur finale on trouve $c = 0$ et

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{2s}\ln(s^2+1)$$

Autre méthode : On fait un changement dans le cosinus intégral en posant $u = tx$ donc $f(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x}dx$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_1^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{x}dx\right\} &= \int_1^{+\infty}\mathcal{L}\left\{\frac{\cos(tx)}{x}\right\}dx \\ &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\frac{s}{x^2+s^2}dx \\ &= s\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{x^2+s^2}dx\end{aligned}$$

Ensuite on décompose la fraction rationnelle en éléments simples et on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= s\int_1^{+\infty}\frac{\frac{1}{s^2}}{x} + \frac{-\frac{1}{s^2}x}{x^2+s^2}dx = \frac{1}{s}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+s^2}dx \\ &= \frac{1}{s}\left[\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+s^2)\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s}\left[\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+s^2}}\right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2s}\ln(1+s^2)\end{aligned}$$

(e) $f(t)=\sin\sqrt{t}$. On utilise le développement en série formelle $\sin\sqrt{t}=\sqrt{t}-\frac{(\sqrt{t})^3}{3!}+\frac{(\sqrt{t})^5}{5!}-\frac{(\sqrt{t})^7}{7!}+\ldots=t^{1/2}-\frac{t^{3/2}}{3!}+\frac{t^{5/2}}{5!}-\frac{t^{7/2}}{7!}+\ldots$. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin\sqrt{t}](s) &= \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}}-\frac{\Gamma(5/2)}{3!s^{5/2}}+\frac{\Gamma(7/2)}{5!s^{7/2}}-\frac{\Gamma(9/2)}{7!s^{9/2}}+\cdots\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\left\{1-\left(\frac{1}{2^2 s}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2^2 s}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2^2 s}\right)^3+\cdots\right\}\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}e^{-1/4s}\end{aligned}$$

où on a utilisé $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ et $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

Autre méthode On passe par une intégrale complexe,

$$\mathcal{L}[\sin\sqrt{t}]=\operatorname{Im}\int_0^\infty e^{-st}e^{i\sqrt{t}}dt$$

Calculons maintenant

$$I(s,t)=\int e^{i\sqrt{t}-st}dt$$

par un changement de variable $u=\sqrt{t}$ on obtient

$$\begin{aligned}I(s,t) &= \int 2ue^{-su^2+iu}du\\ &= \frac{1}{s}\int(2su-i)e^{iu-su^2}du+\frac{i}{s}\int e^{iu-su^2}du=\frac{1}{s}J+\frac{i}{s}K\end{aligned}$$

Dans J on fait le changement $v=iu-su^2$, d'où

$$J=-\int e^v dv=-e^{i\sqrt{i}-st}+C_1.$$

Dans K on écrit

$$K=\int e^{-\left(u\sqrt{s}-\frac{t}{2\sqrt{5}}\right)^2-\frac{1}{4s}}du$$

puis on fait le changement de variable $w=u\sqrt{s}-\frac{t}{2\sqrt{5}}$ donc

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{\sqrt{s}}\int e^{-w^2-\frac{1}{4s}}dw\\ &= \frac{\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4s}}}{2\sqrt{s}}\operatorname{erf} w+C_2\\ &= \frac{\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4s}}}{2\sqrt{s}}\operatorname{erf}\frac{2s\sqrt{t}-i}{2\sqrt{s}}+C_2.\end{aligned}$$

où $\operatorname{erf} z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$ est la fonction erreur. On obtient donc

$$I(s,t)=\frac{i\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4s}}}{2s^{\frac{3}{2}}}\operatorname{erf}\frac{2s\sqrt{t}-i}{2\sqrt{s}}-\frac{e^{i\sqrt{t}-st}}{s}+C.$$

Maintenant on passe aux limites,

$$\int_0^\infty e^{i\sqrt{t}-st}dt=\lim_{t\to\infty}I(s,t)-\lim_{t\to 0}I(s,t)$$

ce qui donne

$$\int_0^\infty e^{i\sqrt{t}-st}dt=\frac{i\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4s}}}{2s^{\frac{3}{2}}}+\frac{i\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4s}}}{2s^{\frac{3}{2}}}\operatorname{erf}\frac{i}{2\sqrt{s}}+\frac{1}{s}.$$

puisque $\operatorname{erf}\frac{i}{2\sqrt{s}}\in i\mathbb{R}$ (avec $s>0$), en prenant la partie imaginaire de l'expression on trouve

$$\mathcal{L}\{\sin\sqrt{t}\}(s)=\frac{\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4s}}}{2s^{\frac{3}{2}}},\, s>0$$

(f) $f(t)=\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$. On pose $g(t)=\sin\sqrt{t}$. Alors $g'(t)=\frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}f(t)$ et $g(0)=0$. Donc

$$\mathcal{L}[g'(t)](s)=\frac{1}{2}\mathcal{L}[f(t)](s)=s\mathcal{L}[g(t)](s)-g(0)=s\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}e^{-1/4s}\right)$$

donc

$$\mathcal{L}[\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}](s)=\frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}e^{-1/4s}$$

Exercice 2. Calculer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

(a) $s\mapsto\frac{1}{\sqrt{2s+3}}$ $\quad(c)$ $s\mapsto\frac{s}{(s^2+a^2)^2},(a\neq 0)$
(b) $s\mapsto\frac{s+1}{s^2+s+1}$ $\quad(d)$ $s\mapsto\frac{1}{s^3(s^2+1)}$

Corrigé l'exercice 2. (a) On a

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{2s+3}}](t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+3/2)^{1/2}}](t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3t/2}\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{s^2+s+1}] &= \mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}]\\ &= \mathcal{L}^{-1}[\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}]+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}]\\ &= e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\end{aligned}$$

(c) On a

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]=\frac{-2s}{(s^2+a^2)^2}$$

donc

$$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}=-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]$$

et comme

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+a^2}]=\frac{\sin at}{a}$$

on a

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}]=-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)]=\frac{1}{2}t\left(\frac{\sin at}{a}\right)=\frac{t\sin at}{2a}$$

(d) On a $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]=\sin t$ donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s^2+1)}] &= \int_0^t \sin u\,du = 1-\cos t\\ \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2(s^2+1)}] &= \int_0^t (1-\cos u)du = t-\sin t\\ \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^3(s^2+1)}] &= \int_0^t (u-\sin u)du = \frac{t^2}{2}+\cos t-1\end{aligned}$$

Exercice 3. (**Application de la transformée de Laplace aux Poutres en porte-à-faux**) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{\omega(x)}{\gamma},\quad 0\le x\le \ell$$

$$y(0)=0, y'(0)=0, y''(\ell)=0, y'''(\ell)=0$$

où $y(x)$ est la flèche (l'axe) en tout point x de la poutre. On suppose que la poutre de longueur ℓ est emboitée à son extrémité $x=0$ et libre à son extrémité $x=\ell$ et qu'elle porte une charge $\omega(x)$ par unité de longueur donnée par

$$\omega(x)=\begin{cases}\omega_0 & 0<x<\ell/2\\ 0 & \ell/2<x<\ell\end{cases}$$

ω_0 et γ étant des constantes.

Corrigé l'exercice 3. Pour Appliquer la transformation de Laplace, nous étendons la définition de $\omega(x)$ à

$$\omega(x)=\begin{cases}\omega_0 & 0<x<\ell/2\\ 0 & x>\ell/2\end{cases}$$

ce qui la donne en fonction de la fonction de Heaviside

$$\omega(x)=\omega_0(H(x)-H(x-\ell/2))$$

Sa transformée de Laplace est

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\omega(x)](s) &= \omega_0\mathcal{L}[H(x)](s)-\omega_0\mathcal{L}[H(x-\ell/2)](s)\\ &= \omega_0(\frac{1}{s}-e^{-s\ell/2}\frac{1}{s})\\ &= \omega_0\frac{1-e^{-s\ell/2}}{s}\end{aligned}$$

Posons $Y(s)=\mathcal{L}[y(x)](s)$, donc

$$s^4Y-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)=\frac{\omega_0}{\gamma}\frac{1-e^{-s\ell/2}}{s}$$

On pose $y''(0)=c_1$ et $y'''(0)=c_2$ et avec les premières conditions initiales on trouve

$$Y=\frac{c_1}{s^3}+\frac{c_2}{s^4}+\frac{\omega_0}{\gamma s^5}(1-e^{-s\ell/2})$$

et en appliquant $\mathcal{L}^{-1}$ on trouve

$$y(x)=\frac{c_1x^2}{2!}+\frac{c_1x^3}{3!}+\frac{\omega_0}{\gamma}\frac{x^4}{4!}-\frac{\omega_0}{\gamma}\frac{(x-\ell/2)^4}{4!}H(x-\ell/2)$$

avec les secondes condition inititailes, on trouve $c_1=\frac{\omega_0\ell^2}{8\gamma}$ et $c_1=-\frac{\omega_0\ell}{2\gamma}$.

Exercice 4. (**Application de la transformée de Laplace à l'équation de la chaleur**)

Résoudre l'équation de la chaleur suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(x,0) = 3\sin 2\pi x, u(0,t) = 0, u(1,t) = 0$$

Corrigé l'exercice 4. On pose $Y(x,s) = \mathcal{L}[u(tx,t)](s)$ la transformée de Laplace de u par rapport à t. Donc

$$sY - u(x,0) = \frac{d^2Y}{dx^2}$$

ou encore

$$\frac{d^2Y}{dx^2} - sY = -3\sin 2\pi x$$

Cette équation a pour solution générale

$$Y(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{3}{s+4\pi^2}\sin 2\pi x$$

On prend ensuite la transformée de Laplace des condition initiales (par rapport à t)

$$\mathcal{L}[u(0,t)](s) = Y(0,s) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[u(1,t)](s) = Y(1,s) = 0$$

et en portant ceci dans la solution on trouve $c_1 + c_2 = 0$ et $c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0$, ce qui donne $c_1 = c_2 = 0$ et on obtient

$$Y(x,s) = \frac{3}{s+4\pi^2}\sin 2\pi x$$

d'où après inversion

$$u(x,t) = 3e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x$$

Exercice 5. (**Application de la transformée de Laplace aux cordes vibrantes**)

Résoudre le problème de valeurs aux limites suivant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ x > 0,\ t > 0\ (a > 0)$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, u(0,t) = A_0 \sin\omega t, |u(x,t)| < M$$

où $u(x,t)$ est le déplacement transversal d'une corde (infiniment longue) en un point x à un temps t. On supposera qu'une extrémité se trouve en $x = 0$, se confond initialement dans l'axe des x. L'extrémité $x = 0$ est soumise à un mouvement transversal périodique d'amplitude $A_0 \sin\omega t$ $(t > 0)$.

Corrigé l'exercice 5. On pose $Y(x,s) = \mathcal{L}\{y(x,t)\}(s)$. Donc

$$s^2 Y - su(x,0) - u_t(x,0) = a^2 \frac{d^2}{dx^2} Y$$

ou encore

$$\frac{d^2}{dx^2} Y - \frac{s^2}{a^2} Y = 0$$

qui a pour solution générale

$$Y(x,s) = c_1 e^{sx/a} + c_2 e^{-sx/a}$$

On a aussi $Y(0,s) = \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2}$. Comme u est bornée ($|u(x,t)| < M$ déplacement limité), Y est bornée donc $c_1 = 0$ et

$$Y(x,s) = \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2} e^{-sx/a}$$

d'où par inversion

$$u(x,t) = \begin{cases} A_0 \sin\omega(t - \frac{x}{a}) & t > x/a \\ 0 & t < x/a \end{cases}$$

Exercice 6. On cherche, en utilisant la transformée de Laplace, à résoudre l'équation différentielle

$$y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = t^2 e^t \qquad \text{(Equation 1)}$$

avec les conditions

$$y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2.$$

On pose $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$.

(1) Transformer l'Equation 1 et déduire que $Y(s)$ vérifie une équation algébrique de la forme $f(s)Y(s) + g(s) = h(s)$ où $f(s)$, $g(s)$ et $h(s)$ sont à déterminer.

(2) En utilisant la transformée de Laplace inverse, déterminer alors une solution de l'Equation 1.

Corrigé l'exercice 6. Soit $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$, alors l'equation différentielle se transforme sous la forme

$$\begin{aligned} &\left(s^3 Y - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)\right) \\ &-3\left(s^2 Y - sy(0) - y'(0)\right) \\ &+3(sY - y(0)) \\ &-Y \\ &= \frac{2}{(s-1)^3} \end{aligned}$$

d'où en tenant compte des conditions $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2$,

$$\begin{aligned}\left(s^3 - 3s^2 + 3s - 1\right) Y(s) - s^2 + 3s - 1 &= \tfrac{2}{(s-1)^3} \\ (s-1)^3 Y(s) - s^2 + 3s - 1 &= \tfrac{2}{(\theta-1)^3}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^3 - 3s + 1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}\end{aligned}$$

Par inversion de la transformée de Laplace, on trouve

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}\right](t) \\ &= e^t - te^t - \frac{t^2e^t}{2!} + \frac{2t^5e^t}{5!} \\ &= e^t - te^t - \frac{t^2e^t}{2} + \frac{t^5e^t}{60}\end{aligned}$$

Exercice 7. (**Application de la transformée de Laplace aux équations intégrales de type convolutif**)

Résoudre l'équation intégrale suivante

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(u)\sin(t-u)du$$

Corrigé l'exercice 7. On a

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(u)\sin(t-u)du = t^2 + y(t) \star \sin(t),$$

donc en posant $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ on trouve en utilisant la proprité de convolution

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + Y(s) \times \frac{1}{s^2+1}$$

ou encore

$$Y(s) = \frac{2(s^2+1}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

D'où

$$y(t) = 2(\frac{t^2}{2!}) + 2(\frac{t^4}{4!}) = t^2 + \frac{t^4}{12}.$$

Exercice 8. (**Application de la transformée de Laplace aux équations aux différences**)

Résoudre l'équation aux différences suivante :

$$y'(t) + y(t-1) = t^2$$

avec $y(t) = 0$ pout $t \leq 0$.

Corrigé l'exercice 8. On pose $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$, donc $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = sY(s) - 0 = sY(s)$ D'autres part

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y(t-1)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}y(t-1)dt \\ &= \int_{-1}^\infty e^{-s(u+1)}y(u)du \\ &= e^{-s}\int_0^\infty e^{su}y(u)du \\ &= e^{-s}Y(s)\end{aligned}$$

D'où

$$sY + e^{-s}Y = \frac{2}{s^3}$$

ou encore

$$Y(s) = \frac{2}{s^3(s+e^{-s})} = \frac{2}{s^4(1+e^{-s}/s)}$$

Ainsi formellement,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s^4}\left(1 - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^3} + \cdots\right) \\ &= \frac{2}{s^4} - \frac{2e^{-s}}{s^5} + \frac{2e^{-2s}}{s^6} - \frac{2e^{-3s}}{s^7} + \cdots \\ &= 2\sum_{n=0}^\infty \frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}\end{aligned}$$

Or pour chaque n,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-ns} \times \frac{1}{s^{n+4}}\} = \begin{cases}\frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} & t \geq n \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

d'où

$$y(t) = 2\sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor}(-1)^n\frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!}$$

où $\lfloor t \rfloor$ est la partie entière de t

On vérifie facilement que cette fonction est solution de l'équation proposée.