

Séance 5  
Systèmes différentiels

**Exercice 1.** Soient  $a \in \mathbb{R}^*$  et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer le polynôme minimal de  $A$ .
- (b) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser.
- (c) Calculer  $e^A$ .
- (d) En déduire la solution générale du système  $X'(t) = AX(t)$ .

**Exercice 2.** Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' &= (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' &= 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2 \end{cases}$$

**Exercice 3.** Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} y' &= x \\ z' &= x + y + z \end{cases}$$

**Exercice 4.** Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= y(t) + t \\ z'(t) &= 2z(t) \end{cases}$$

**Exercice 5.** Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + 2z \\ y' &= 10x - 5y + 7z \\ z' &= 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

**Exercice 6.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation

$$t^2 y'' - 6ty' + (12 + t^2)y = 0$$

en cherchant des solutions développables en séries entières.