Séance 5

Systèmes différentiels

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le polynôme minimal de A.
(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
(c) Calculer e^A.
(d) En déduire la solution générale du système $X'(t) = AX(t)$.

Corrigé l'exercice 1. (a) Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-2)(X+1)^2$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.
La matrice est diagonalisable, $P^{-1}AP = D$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) On en déduit que son polynôme minimal est $\mu_A(\lambda) = (X-2)(X+1)$.

(c) Par division euclidienne de X^n par $\mu_A(X)$ on a $X^n = (X-2)(X+1)Q(X) + \alpha X + \beta$. On évalue cette égalité en 2 et -1 et on trouve

$$\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \quad \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

et

$$e^{tA} = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} A + \frac{2e^{-t} + e^{2t}}{3} I_3$$

(d) La solution générale du système $X'(t) = AX(t)$ est donc $X(t) = e^{tA}V$ avec $V \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' &= (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' &= 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2 \end{cases}$$

Corrigé l'exercice 2. Le système peut se mettre sous la forme $X'(t) = A(t)X(t)$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $A(t)$ est $\chi_{A(t)}(X) = X^2 - (t+1)X + t$ et $\mathrm{Sp}_{A(t)} = \{1, t\}$.

Si $t \neq 1$, alors $A(t)$ admet deux valeurs propres distinctes et par conséquent elle est diagonalisable,

$$E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_t = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A(t) = PD(t)P^{-1}, \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

cette relation est aussi vraie pour $t = 1$.

En posant $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = Y(t) = P^{-1}X(t)$, on a

$$X'(t) = A(t)X(t) \iff Y'(t) = D(t)Y(t)$$

$$\iff \begin{cases} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= ty_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 &= \lambda e^t \\ y_2 &= \mu e^{t^2/2} \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On trouve alors comme solution générale cherchée

$$X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 2e^{t^2/2} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} y' &= x \\ z' &= x+y+z \end{cases}$$

Corrigé l'exercice 3. Le système est de la forme $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

Le spectre de A est $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 0, 2\}$. Comme A admet trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. On trouve

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on a $X' = AX \iff Y' = DY \iff Y(t) = e^{tD}V$ avec $V = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$. La solution générale du système est donc

$$X(t) = PY(t) = \lambda \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Exercice 4. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= y(t) + t \\ z'(t) &= 2z(t) \end{cases}$$

Corrigé l'exercice 4. Le système est de la forme $X' = AX + B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \; X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

La matrice A n'est pas diagonalisable. Elle est triangulaire supérieure par blocs. Le premier bloc est $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente, $N^2 = 0$. Par conséquent $e^{tC} = e^t[I_2 + tN]$ et

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^{(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour tout $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$,

$$X_H(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^t + \mu te^t \\ \mu e^t \\ \nu e^{2t} \end{pmatrix}$$

est solution du système homogène. Une solution particulière du système non-homogène est donnée par

$$X_P(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)ds$$

Or

$$e^{(t-s)A}B(s) = \begin{pmatrix} e^{t-s} & (t-s)e^{t-s} & 0 \\ 0 & e^{t-s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(t-s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(t-s)r^{t-s} \\ se^{t-s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul simple donne

$$\int_0^t s(t-s)e^{t-s}ds = e^t(t-2) + t + 2, \quad \int_0^t s^{t-s}ds = e^t - t - 1.$$

Il s'ensuit que

$$Y_P(t) = \begin{pmatrix} e^t(t-2) + t + 2 \\ e^t - t - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $X_H(t) + X_P(t)$ (c' est la solution qui passe par lorsque $t = 0$ par (λ, μ, ν))

Exercice 5. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + 2z \\ y' &= 10x - 5y + 7z \\ z' &= 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

Corrigé l'exercice 5. Le système est de la forme $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \; X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda+1)$. Cette matrice n'est pas diagonalisable. Elle est triangularisable, $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $Y = P^{-1}X$, donc $X' = AX \iff Y' = TY \iff Y(t) = e^{tT}V$ avec $V = \begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \\ \mu \end{pmatrix}$. D'où

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu t + \nu \\ \mu \end{pmatrix}$$

La solution générale du système est donc

$$X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$t^2y'' - 6ty' + (12 + t^2)y = 0$$

en cherchant des solutions développables en séries entières.

Corrigé l'exercice 6. Soit $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une série entière solution de rayon de convergence $R > 0$. Sur $]-R, R[$, la fonction y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, \;\; y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}, \;\; y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

et comme $t^2y''(t) - 6tty'(t) + (12 + t^2)y(t) = 0$, alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - 6\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + 12\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} t^n = 0$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction y est solution de l'équation différentielle proposée sur $]-R, R[$ ssi

$$\begin{aligned} a_0 = a_1 = a_2 &= 0 \\ n(n-1)a_n - 6na_n + 12a_n + a_{n-2} &= 0 \;\; \forall n \geq 3 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} a_0 = a_1 = a_2 &= 0 \\ (n-3)(n-4)a_n + a_{n-2} &= 0 \;\; \forall n \geq 3 \end{aligned}$$

Pour $n = 3$ ou $n = 4$ la dernière équation ne donne aucune information. Mais pour $n \geq 5$ elle permet d'exprimer les coefficients de la série en fonction de a_3 et a_4.

Pour les termes impairs :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \;\; a_{2k+3} = -\frac{a_{2k+1}}{(2k-1)(2k)} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_3$$

Pour les termes pairs

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \;\; a_{2k+4} = -\frac{a_{2k+2}}{(2k)(2k+1)} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_4$$

La série a donc un rayon de convergence infini (Règle de d'Alembert). En sommant, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y(t) &= a_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k+3} + a_4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+4} \\ &= t^3 \left(a_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} + a_4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} \right) \\ &= t^3 \left(a_3 \cos(t) + a_4 \sin(t) \right) \end{aligned}$$

On peut donc assurer que les fonctions $t \mapsto t^3 \cos t$ et $t \mapsto t^3 \cos t$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ à l'équation. C'est en fait un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ (l'espace des solutions de l'équation (homogène) proposée est de dimension 2). On déduit que la solution générale est de la forme

$$y(t) = \lambda t^3 \cos t + \mu t^3 \sin t, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$