Séance 1
Calcul différentiel

Exercice 1. Les champs suivants sont-ils différentiables ? Si oui calculer leur différentielle

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exercice 2. (1) Déterminer les coordonnées de $\operatorname{grad} f$ et Δf où f est le champ scalaire suivant :

(a) $f(x,y,z) = xy^2 - yz^2$.

(b) $f(x,y,z) = xyz\sin(xy)$.

(2) Déterminer $\operatorname{rot} f$ et $\operatorname{div} f$ où f est le champ de vecteurs suivant :

(a) $f(x,y,z) = \left(2x^2y, 2xy^2, xy\right)$.

(b) $f(x,y,z) = (\sin(xy), 0, \cos(xz))$.

(c) $f(x,y,z) = (x(2y+z), -y(x+z), z(x-2y))$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ sa base canonique orthonormée. Montrer que les champs scalaires suivants sont différentiables ; calculer la différentielle et les dérivées partielles premières de chaque champs :

(a) $\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}|\mathbf{x}\rangle$, le vecteur $\mathbf{u}$ étant fixé.

(b) $f(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, où $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i$, la matrice $A = (a_{ij})_{i,j}$ étant fixée.

Exercice 4. Soit $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Déterminer la différentielle des champs scalaires suivants

(a) $h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$.

(b) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^4$.

Exercice 5. Soit ω la forme différentielle :

$$\omega = \left(3x^2y + z^3\right)dx + \left(3y^2z + x^3\right)dy + \left(3xz^2 + y^3\right)dz.$$

(a) Montrer que ω est fermée.

(b) La forme ω est-elle exacte $\mathbb{R}^3$? Si oui, chercher une primitive sur $\mathbb{R}^3$, *i.e.* un champ scalaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $\omega = Df$.

Exercice 6. On considère la forme différentielle

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2},$$

définie sur le demi-plan $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\right\}$.

(a) Montrer que ω est fermée.

(b) La forme ω est-elle exacte sur U. Si oui chercher une primitive sur U, *i.e.* un champ scalaire $f : U \to \mathbb{R}$ tel que $\omega = Df$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de calsse $\mathcal{C}^1$. Calculer les dérivées/dérivées partielles des fonctions suivantes :

(a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(2+2t, t^2)$;

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$;

(c) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = f(y,x)$.

Exercice 8. Etudier les extrema des champs scalaires suivants :

(a) $f(x,y) = 2x^3 - 3y^2 + 6xy + 2$;

(b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.