Séance 1
Calcul différentiel

Exercice 1. Les champs suivants sont-ils différentiables ? Si oui calculer leur différentielle

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Corrigé l'exercice 1. (a) La fonction $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est différentiable en dehors de $(0,0)$, comme produit/quotient de fonctions différentiables.

Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, les dérivées partielles de $f(x,y)$ existent et sont continues (leurs calcul est laissé au lecteur). Donc, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$Df(x,y)(u,v) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}u + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}v$$

En $(0,0)$ on a $f((0,0)+t(u,v))-f(0,0) = \frac{t^3u^4v}{t^2u^4+v^2} = t\times 0 + o(t)$ où $o(t) = \frac{t^3u^4v}{t^2u^4+v^2}$. D'où la différentiablilité en $(0,0)$ et la différentielle de f en $(0,0)$ est la forme linéaire nulle de $\mathbb{R}^2$.

(b) La fonction $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est différentiable en dehors de $(0,0)$ comme produit/quotient de fonctions différentiables.

Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, les dérivées partielles de $f(x,y)$ existent et sont continues (leurs calcul est laissé au lecteur). Donc, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$Df(x,y)(u,v) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}u + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}v$$

En $(0,0)$ on a $f((0,0)+t(u,v)) - f(0,0) = t\frac{uv^2}{u^2+v^2}$. Mais la fonction $(u,v) \mapsto \frac{uv^2}{u^2+v^2}$ n'est pas linéaire, donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$ (on peut aussi remarquer que $[f((0,0)+(u,v)) - f(0,0)]/\|(u,v)\|_2$ ne tends pas vers 0 lorsque $\|(u,v)\|_2$ tends vers 0).

Exercice 2. (1) Déterminer les coordonnées de grad f et Δf où f est le champ scalaire suivant :

(a) $f(x,y,z) = xy^2 - yz^2$.

(b) $f(x,y,z) = xyz\sin(xy)$.

(2) Déterminer rot f et div f où f est le champ de vecteurs suivant :

(a) $f(x,y,z) = \big(2x^2y, 2xy^2, xy\big)$.

(b) $f(x,y,z) = (\sin(xy), 0, \cos(xz))$.

(c) $f(x,y,z) = (x(2y+z), -y(x+z), z(x-2y))$.

Corrigé l'exercice 2. (1) (a) $\mathrm{grad}(f) = \big(y^2, 2xy - z^2, -2yz\big)$, $\Delta f = 2x - 2y$

(b) $\mathrm{grad}(f) = \big(yz\sin(xy) + xy^2z\cos(xy), xz\sin(xy) + x^2yz\cos(xy), xy\sin(xy)\big)$, $\Delta f = (xyz+1)(x+y)\cos(xy) - xyz(x+y)\sin(xy)$

(2) (a) $\mathrm{rot}(f) = (x, -y, -2x^2 - 2y^2)$, $\mathrm{div}(f) = 8xy$.

(b) $\mathrm{rot}(f) = (0, z\sin(xz), x\cos(xy))$, $\mathrm{div}(f) = y\cos(xy) - x\sin(xz)$.

(c) $\mathrm{rot}(f) = (y - 2z, x - z, -2x - y)$, $\mathrm{div}(f) = 0$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ sa base canonique orthonormée. Montrer que les champs scalaires suivants sont différentiables ; calculer la différentielle et les dérivées partielles premières de chaque champs :

(a) $\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle$, le vecteur $\mathbf{u}$ étant fixé.

(b) $f(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, où $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i$, la matrice $A = (a_{ij})_{i,j}$ étant fixée.

Corrigé l'exercice 3. (a) Si $u = (u_1, \cdots, u_n)$ alors

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \varphi(x) = \langle u | x \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_kx_k$$

est clairement différentiable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$).

φ est linéaire, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x + \lambda y) = \langle x_0, x + \lambda y \rangle = \langle x_0, x \rangle + \lambda \langle x_0, y \rangle = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$$

On en déduit que $D\varphi(x) = \varphi$ pour tout x et

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \partial_u \varphi(x) = D\varphi(x)(u) = \langle u | x \rangle$$

(b) On fera attention à ce que A n'est pas nécessairement symétrique. On écrit

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \langle Ax | x \rangle = {}^t xAx$$

Il est claire que $x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x)$ est différentiable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$). On a $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n a_{ik}x_i + a_{ki}x_i$, donc en posant $h = (h_1, \cdots, h_k) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \partial_h f(x) &= \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_i h_k + a_{ki}x_i h_k \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}x_i h_k + \sum_{k=1}^n a_{ki}x_i h_k \\ &= \langle Ax|h\rangle + \langle A^t x|h\rangle \quad \text{où } A^t \text{ est a transposée de } A \end{aligned}$$

Comme les $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ sont continues (elle sont même de classe $\mathcal{C}^\infty$), on a

$$D_h f(x) = \partial_h f(x) = \langle Ax|h\rangle + \langle A^t x|h\rangle = h^t Ax + x^t Ah$$

On peut calculer $D_h f(x)$ directement sans passer par les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \langle A(x+h)|(x+h)\rangle - \langle Ax|x\rangle \\ &= \langle Ax + Ah|x+h\rangle - \langle Ax|x\rangle \\ &= \langle Ax|x\rangle + \langle Ax|h\rangle + \langle Ah|x\rangle + \langle Ah|h\rangle - \langle Ax|x\rangle \\ &= \langle Ax|h\rangle + \langle Ah|x\rangle + \langle Ah|h\rangle \\ &= \langle Ax|h\rangle + \langle h|A^t x\rangle + \langle Ah|h\rangle \\ &= \langle Ax|h\rangle + \langle A^t x|h\rangle + \langle Ah|h\rangle \end{aligned}$$

Comme $h \mapsto \langle Ax|h\rangle + \langle A^t x|h\rangle$ est linéaire c'est $D_h f(x)$, le terme $\langle Ah|h\rangle$ est consiféré comme un reste.

Exercice 4. Soit $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot|\cdot\rangle$. Déterminer la différentielle des champs scalaires suivants

(a) $h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$.

(b) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^4$.

Corrigé l'exercice 4. Attention h n'est pas linéaire (par exemple $h(2x) = \|2x\|^2 = 4\|x\|^2 = 4h(x) \neq 2h(x)$).

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} h(x+a) - h(x) &= \|x+a\|^2 - \|x\|^2 \\ &= \langle x+a|x+a\rangle - \|x\|^2 \\ &= (\langle x|x\rangle + \langle x|a\rangle + \langle a|x\rangle + \langle a|a\rangle) - \|x\|^2 \\ &= \left(\|x\|^2 + 2\langle x|a\rangle + \|a\|^2\right) - \|x\|^2 \\ &= 2\langle x|a\rangle + \|a\|^2 \end{aligned}$$

Comme $a \mapsto \langle x|a\rangle$ est linéaire, $D_a h(x) = Dh(x)(a) = 2\langle x|a\rangle$.

(b) La fonction $f(x) = \|x\|^4$ s'écrit $f = g \circ h$ où

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, h(x) = \|x\|^2$$

et

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = t^2$$

h et g sont différentiables, donc $g \circ h$ est différentiable et pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$D(g \circ h)(x) = Dg(h(x)) \circ Dh(x)$$

et pour tout $a \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} D_a(g \circ h)(x) &= D(g \circ h)(x)(a) \\ &= [Dg(h(x)) \circ Dh(x)(\, a) \\ &= Dg(h(x))(Dh(x)(a)) \\ &= D_{D_a h(x)} g(h(x)) \end{aligned}$$

On a déjà calculer la différentielle de h, $Dh(x)(a) = 2\langle x|a\rangle$. De plus la différentielle de g est $Dg(t)(s) = sg'(t)$ (multiplication par la dérivée).

Donc

$$\begin{aligned} \partial_a f(x) = Df(x)(a) &= \big[Dg(h(x)) \circ Dh(x)\big](a) \\ &= Dg(h(x))\,(Dh(x)(a)) \\ &= Dh(x)(a) \times g'(h(x)) = 2\langle x|a\rangle \times 2h(x) \\ &= 4||x||^2\,\langle x|a\rangle \end{aligned}$$

Remarquez bien que $a \mapsto 4||x||^2\,\langle x|a\rangle$ est linéaire.

Exercice 5. Soit ω la forme différentielle :

$$\omega = \left(3x^2y + z^3\right)dx + \left(3y^2z + x^3\right)dy + \left(3xz^2 + y^3\right)dz.$$

(a) Montrer que ω est fermée.

(b) La forme ω est-elle exacte $\mathbb{R}^3$? Si oui, chercher une primitive sur $\mathbb{R}^3$, *i.e.* un champ scalaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $\omega = Df$.

Corrigé l'exercice 5. (a) On pose

$$P = 3x^2y + z^3, \quad Q = 3y^2z + x^3, \quad R = 3xz^2 + y^3.$$

On vérifie que la forme différentielle est fermée, en calculant :

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}$$

et en montrant que ces quantités sont nulles.

(b) Comme $\mathbb{R}^3$ est un ouvert étoilé, le théorème de Poincaré garantit que ω est exacte. On cherche donc une fonction f telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R.$$

La première condition donne :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + z^3$$

$$f(x, y, z) = x^3y + xz^3 + g(y, z)$$

où g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On a ensuite :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2z + x^3 \Longrightarrow x^3 + \frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2z + x^3$$

On en déduit que $g(y, z) = y^3z + h(z)$, où h est une fonction $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On cherche de même h :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2 + y^3 \Longrightarrow 3xz^2 + y^3 + h'(z) = 3xz^2 + y^3$$

h est constante, et on a prouvé que les primitives de ω sont de la forme :

$$f(x, y, z) = x^3y + xz^3 + y^3z + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. On considère la forme différentielle

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

définie sur le demi-plan $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$.

(a) Montrer que ω est fermée.

(b) La forme ω est-elle exacte sur U. Si oui chercher une primitive sur U, *i.e.* un champ scalaire $f : U \to \mathbb{R}$ tel que $\omega = Df$.

Corrigé l'exercice 6. (a) On pose

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

On vérifie que ω est fermée : on vérifie que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

(b) On remarque que U est étoilé (par rapport à $(1, 0)$ par exemple). Par le théorème de Poincaré, ω est exacte. On cherche ses primitives sur U, i.e. les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

On résout la seconde équation en intégrant par rapport à y : on trouve $f(x, y) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + h(x)$ où h est $\mathcal{C}^1$ et ne dépend que de x. On a alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = h'(x) - \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$.

On a donc $h'(x) = 0$ sur U, ce qui entraîne que h est constante. Les primitives de f sont donc de la forme : $f(x, y) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + c$ avec c constante.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de calsse $\mathcal{C}^1$. Calculer les dérivées/dérivées partielles des fonctions suivantes :

(a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$;

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$;

(c) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = f(y, x)$.

Corrigé l'exercice 7. (a) $t \mapsto (2+2t, t^2)$ est de classe C^1 (car polynomiale), donc g est de classe C^1. Posons $x(t) = 2 + 2t$, $y(t) \mapsto t^2$. Donc $g(t) = f(x(t), y(t))$ et

$$\begin{aligned} g'(t) = \frac{\partial g(t)}{\partial t} &= \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x}\frac{\partial x(t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y}\frac{\partial y(t)}{\partial t} \\ &= x'(t)\frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} \\ &= 2\frac{\partial f}{\partial x}(2 + 2t, t^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(2 + 2t, t^2) \end{aligned}$$

(b) $(u, v) \mapsto (u^2, v^2)$ est de classe C^1 (car polynomiale), donc g est de classe C^1. On pose $x(u, v) = uv$ et $y(u, v) = u^2 + v^2$ on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ &= v\frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x(u, v)}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ &= u\frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2) \end{aligned}$$

(c) On pose $g(x, y) = f(X(x, y), Y(x, y)$ avec $X(x, y) = y$ et $Y(x, y) = x$ Donc

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}f(y, x)$$

De même (et par symétrie)

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}f(y, x)$$

Exercice 8. Etudier les extrema des champs scalaires suivants :

(a) $f(x, y) = 2x^3 - 3y^2 + 6xy + 2$;

(b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$.

Corrigé l'exercice 8. (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x^3 - 3y^2 + 6xy + 2$. On a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + 6y \\ -6y + 6x \end{pmatrix}$$

On trouve alors deux points critiques, $(0,0)$ et $(-1,-1)$.

On a de plus $\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$, d'où

$\mathrm{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -3\sqrt{5}-3 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5}-3 \end{pmatrix}$, donc $(0,0)$ est un point selle et

$\mathrm{Hess} f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -3\sqrt{5}-9 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{5}-9 \end{pmatrix}$, donc $(-1,-1)$ est un maximum relatif. Comme la fonction $f(x,0) = 2x^3$ n'est pas majorée ce maximum n'est pas global.

(b) Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$. On trouve trois points critiques $(-2,2)$, $(0,0)$ et $(2,-2)$.

On a de plus $\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-8 & 8 \\ 8 & 12y^2-8 \end{pmatrix}$, d'où

$\mathrm{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$, cette matrice est de déterminant 0, donc elle est dégénérée. On ne peut rien conclure. On procède alors comme suit : $f(u,v) = u^2 + v^2 - 4(u-v)^2$. Si $u = v = t$, alors, $f(t,t) = 2t^4 > 0 = f(0,0)$ et si $u = 0$, $v = t$ alors $f(0,t) = t^2(t^2-4) < 0 = f(0,0)$ si t est petit. Par conséquent, $(0,0)$ n'est ni un maximum, ni un minimum.

$\mathrm{Hess} f(-2,2) = \begin{pmatrix} 40 & 8 \\ 8 & 40 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de déterminant $1600 - 64 > 0$ et de trace $80 > 0$. Donc elle a deux valeurs propres > 0. Par suite $(-2,2)$ est un minimum local.

Le point $(2,-2)$ est aussi un minimum local.