Feuille 0

Révisions, analyse euclidienne

Exercice 1. Pour n entier ≥ 1, on pose

$$f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0;+\infty[$.
(b) Étudier la convergence uniforme sur $[a;+\infty[$ avec $a > 0$.
(c) Étudier la convergence uniforme sur $[0;+\infty[$.

Corrigé l'exercice 1. (a) Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0 \to 0$ et si $x > 0$, alors $f_n(x) \to 0$ car $e^{-nx} \to 0$. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Pour $a > 0$, on a $\sup_{[a;+\infty[} |f_n(x)| \leq e^{-na} \to 0$, d'où la convergence uniforme sur $[a;+\infty[$.
(c) On a $\|f_n\|_\infty = \sup_{[0;+\infty[} |f_n(x)| \geq f_n(\frac{\pi}{2n}) = e^{-\pi/2} \not\to 0$, donc on a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ donnée par :
(a) $f_n(x) = \frac{nx^2e^{-nx}}{1-e^{-x^2}}$, sur $\mathbb{R}_+^*$;
(b) $f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$, sur $\mathbb{R}$.

Corrigé l'exercice 2. (a) Il est évident que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Il n'y a pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim_{x\to 0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ par contre $\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$. Etudions la convergence unfirme sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
Pour $a > 0$, on a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{[a;+\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{nx^2e^{-nx}}{1-e^{-a^2}}$$

et par étude de fonction on a $nx^2e^{-nx} \leq \frac{4}{n}e^2$ (maximum en $x = \frac{2}{n}$), donc

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{4e^2}{n(1-e^{-a^2})} \to 0$$

d'où la convergence uniforme sur $[a;+\infty[$.
(b) Il est évident que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(\arccos\frac{1}{\sqrt{n+1}}) = (1-\frac{1}{n+1})^{n/2}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

(faire une étude de la fonction $x \mapsto f_n(x)$). D'où la convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 3. Pour n entier ≥ 2 on définit la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n^\alpha \ln n}, \; x \in \mathbb{R}$$

où α est un paramètre réel.
(a) Déterminer le domaine D de convergence simple de la suite (f_n), ainsi que la fonction limite f.
(b) Discuter, selon les valeurs de α, la convergence uniforme sur D.

Corrigé l'exercice 3. (a) Si $x < 0$, $\frac{e^{-nx}}{n^\alpha \ln n} \to +\infty$ pour tout α, donc $f_n \to -\infty$. Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$. Si $x > 0$, alors $\frac{e^{-nx}}{n^\alpha \ln n} \to 0$ pour tout α. On en déduit (f_n) converge simplement sur $D = [0;+\infty[$ vers la fonction nulle.
(b) $\sup_D |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{e^{-1}}{n^{\alpha+1}\ln n}$. On a donc convergence uniforme sur D si et seulement si $\alpha + 1 \geq 0$.

Exercice 4. Etudier (convergence simple, convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) des séries de fonctions de termes généraux :
(a) $f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}_+$.
(b) $f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Corrigé l'exercice 4. (a) *Convergence simple.* Chaque fonction $f_n, n \in \mathbb{N}$, est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $x < 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et la série de terme général $f_n(x), n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement.
- Si $x = 0$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = f_n(0) = 0$, la série de terme général $f_n(x), n \in \mathbb{N}$, converge.
- Si $x > 0, n^2 f_n(x) = x^2e^{-x\sqrt{n}+3\ln n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (d'après un théorème de croissances comparées) et donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dans ce cas aussi, la série de terme général $f_n(x), n \in \mathbb{N}$, converge.

Ainsi la série de fonctions de terme général $\sum_n f_n$, converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

Convergence normale. La fonction f_0 est la fonction nulle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$et pour tout réel positif x,

$$f_n'(x) = n\left(2x - x^2\sqrt{n}\right)e^{-x\sqrt{n}} = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

La fonction f_n est positive sur $[0, +\infty[$, croissante sur $\left[0, \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$. On en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty]} |f_n(t)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 4e^{-2}.$$

Par suite, la série numérique de terme général $\|\mathrm{f_r}\|_\infty$, $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement et donc la série de fonctions de terme général $f_n, n \in \mathbb{N}$, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $a > 0$. Pour $n \geqslant \frac{4}{a^2}$, on a $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant$ a et donc la fonction f_n est décroissante sur $[\mathrm{a}, +\infty[$. Soit donc n un entier supérieur ou égal à $\frac{4}{a^2}$. Pour tout réel t supérieur ou égal à a, on a $|f_n(t)| = f_n(t) \leqslant f_n(a)$ et donc $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(t)| = f_n(a)$.

Comme la série numérique de terme général $f_n(a), n \in \mathbb{N}$, converge, la série de fonctions de terme général $f_n, n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Convergence uniforme sur $[0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|R_n(t)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \geqslant f_{n+1}(t),$$

et donc

$$\sup_{t\in[0,+\infty} |R_n(t)| \geqslant \sup_{t\in[0,+\infty} |f_{n+1}(t)| = 4e^{-2}.$$

Par suite, $\sup_{t\in[0,+\infty[} |R_n(t)|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc la série de fonctions de terme général $f_n, n \in \mathbb{N}$, ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

(b) *Convergence simple.* Chaque fonction $f_n, n \in \mathbb{N}^*$, est définie sur $]0, +\infty[$. Soit $\chi \in]0, +\infty[$. Puisque $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3x^2} > 0$, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge. Donc la série de fonctions de terme général $\mathrm{f_n}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Convergence normale. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est décroissante et positive sur $]0, +\infty[$. Donc

$$\sup_{x\in]0,+\infty|} |f_n(x)| = \mathrm{f_n}(0) = \frac{1}{\mathrm{n}}.$$

Puisque la série numérique de terme général $\frac{1}{\mathrm{n}}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$, diverge la série de fonctions de terme général $f_n, n \in \mathbb{N}^*$, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est décroissante et positive sur $[a, +\infty[$ et donc $\sup_{x\in[a,+\infty} |f_n(x)| = f_n(a)$. Comme la série numérique de terme général $f_n(a), n \in \mathbb{N}^*$, converge, la série de fonctions de terme général $f_n, n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Pour tout $a > 0$, la série de fonctions de terme général $f_n, n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et uniformément sur $[\mathrm{a}, +\infty[$.

Exercice 5. (a) Etudier la convergence simple la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} e^{-nx^n}.$$

(b) La fonction limite f est-elle continue sur $]1; +\infty[$?
(c) f est-elle dérivable sur $]1; +\infty[$?

Corrigé l'exercice 5. (a) $f_n(x)$ ne tend vers 0 que si $x \geq 1$.
Si $x > 1$, $|f_n(x)|^{1/n} = e^{-x^n}$ et $\lim_{n\to+\infty} e^{-x^n} = 0$ ce qui montre la convergence absolue de la série dans ce cas.
Si $x = 1$, $f_n(1) = e^{-n}$ et on a une série géométrique convergente.

(b) On a $\sup_{x\geq 1} f_n(x) = e^{-n}$, d'où la convergence normale sur $[1; +\infty[$ ce qui entraîne la continuité de f sur $[1; +\infty[$.

(c) $|f_n'(x)|^{1/n} = n^{2/n}x^{(n-1)/n}e^{-x^n} \to 0$ si $x > 1$ et $|f_n'(1)|^{1/n} \to e^{-1}$. Donc la série $\sum f_n'(x)$ converge simplement sur $[1; +\infty[$.
Comme $\sup_{x\geq 1} |f_n'(x)| = |f_n'(1)|$, la série des dérivées converge normalement sur $[1; +\infty[$ et f est dérivable sur $[1; +\infty[$.

Exercice 6. Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{Trace}(B^\top A)$ et $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Trace}(A^\top A)}$. Montrer que cela définit un produit scalaire et une norme.

Corrigé l'exercice 6. Commencer par observer que l'on prend bien la trace d'une matrice carrée. Il suffit de vérifier que la formule fournit un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive), le fait que $A \mapsto \sqrt{< A, A >}$ est alors une norme en découle (fait rappelé en cours).

— On utilise la linéarité de la trace : $\langle A + \lambda A', B\rangle = \mathrm{Trace}(B^\top(A + \lambda A)) = \mathrm{Trace}(B^\top A) + \lambda\,\mathrm{Trace}(B^\top A') = \langle A, B\rangle + \lambda\langle A', B\rangle$.
— Une matrice carrée et sa transposée ont même trace donc $\langle A, B\rangle = \mathrm{Trace}(B^\top A) = \mathrm{Trace}((B^\top A)^\top) = \mathrm{Trace}(A^\top B) = \langle B, A\rangle$.

— Si (a_{ij}) sont les coefficients de la matrice A, alors

$$\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \geq 0.$$

Si $\langle A, A\rangle = 0$ alors $a_{ij} = 0\ \forall i, j$ et donc $A = 0$.

Exercice 7. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on note : $d_A(\mathbf{x}) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \text{ t.q. } \mathbf{a} \in A\}$.

Montrer que d_A est continue.

Corrigé l'exercice 7. On montre que l'application d_A est 1-lipschitz et donc continue : Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $a \in A$, $d_A(x) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$ donc $d_A(x) - \|x - y\| \leq \|y - a\|$ puis par passage à la borne inférieure $d_A(x) - d_A(y) \leq \|x - y\|$. Par un raisonnement symétrique on a aussi $d_A(y) - d_A(x) \leq \|x - y\|$ et donc $|d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x - y\|$.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel réel normé. On pose

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\max(1, \|\mathbf{x}\|)}\mathbf{x}.$$

(a) Montrer que f est 2-lipschitzienne.
(b) Montrer que si la norme sur E est euclidienne alors f est 1-lipschitzienne.

Corrigé l'exercice 8. Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$ alors $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$

Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$ alors

$$\|f(x) - f(y) = \|\frac{y}{\|y\|} - x\| = \|\frac{y}{\|y\|}y - +y - x\| \leq \|y\| - 1 + \|y - x\| \leq 2\|y - x\|.$$

Comme x et y jouent le même rôle, on a de même si $\|y\| \leq 1$ et $\|x\| > 1$.

Si $\|x\| > 1$ et $\|y\| > 1$ alors

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y) = \|\frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|}\| &= \|\frac{y - x}{\|y} + x\left(\frac{1}{\|y\|} - \frac{1}{\|x\|}\right) \\ &\| \leq \frac{\|y - x\|}{\|y\|} + \frac{\|x\| - \|y\|}{\|y\|} \\ &\leq 2\|y - x\|\end{aligned}$$

Ainsi f est 2-lipschitzienne.

Supposons maintenant que la norme soit euclidienne

Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$ alors $\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$.

Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$ alors

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 1 - \|y\|^2 + 2\frac{\|y\| - 1}{\|y\|}\langle x|y\rangle.$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle x|y\rangle \leq \|x\|\|y\| \leq \|y\|$ donc

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 l \leq 1 - \|y\|^2 + 2(\|y\| - 1) = -(1 - \|y\|)^2 \leq 0$$

Si $\|x\| > 1$ et $\|y\| > 1$ alors

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2\frac{\|x\|\|y\| - 1}{\|x\|\|y\|}\langle x|y\rangle.$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle x|y\rangle \leq \|x\|\|y\|$

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2(\|x\|\|y\| - 1) = -(\|x\| - \|yl)^2 \leq 0.$$

En conclusion, f est 1-lipschitzienne.