Rattrapage du 12 Mars 2020

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 2h.

Exercice 1. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2} \right)$$

et soit Γ le contour du carré $ABCD$ avec $A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1)$ et $D(1,-1)$ parcourus dans le sens direct.

(a) Calculer l'intégrale curviligne de $\mathbf{f}$ le long de chaque segment AB, BC, CD et DA.

(b) En déduire $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{f}$.

Exercice 2. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, xyz)$$

et considérons la boule unité B paramétrée par

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad \text{avec} \quad \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi], r \in [0, 1] \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

(a) Calculer $\displaystyle\iiint_B \operatorname{div}(\mathbf{F}) dxdydz$.

(b) Calculer $\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ où Σ est la sphère unité et $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à Σ sortant.

(c) Commenter ces deux résultats.

Exercice 3. On considère la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $f(t) = e^{-|t|}$.

(a) Calculer les normes $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$.

(b) Déterminer la transformée de Fourier de f.

(c) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ par application du théorème de Parseval-Plancherel.