Examen du 23 Janvier 2020

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 2h.

Exercice 1. On considère l'équation différentielle suivante

$$y'''(t) - y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0. \tag{E1}$$

(1) On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'équation (E1) est équivalente à un système différentiel homogène de la forme

$$X'(t) = AX(t) \tag{E2}$$

où A est une matrice 3×3 qu'il faut déterminer.

(2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

(3) En déduire l'espace des solutions du système différentiel (E2).

(4) En déduire l'espace des solutions de l'équation (E1).

Corrigé.

(1) La matrice A est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)$ donc A admet 2 valeurs propres 1, 2 et -2 et A est diagonalisable.

(3) les sous-espaces propres de A sont

$$E_A(1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; E_A(2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \; E_A(-2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(4) La solution générale du système linéaire est donc de la forme

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma e^{-2t}\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{-2t} \\ \alpha e^t + 2\beta e^{2t} - 2\gamma e^{-2t} \\ \alpha e^t + 4\beta e^{2t} + 4\gamma e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5) On en déduit que la solution générale de l'équation (E1) est $y(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{-2t}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle suivante avec des conditions initiales

$$\begin{cases} y'''(t) - y(t) = e^t \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 0 \end{cases} \tag{E3}$$

et on suppose que la fonction y est causale. On note $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ la transformée de Laplace de y.

(1) Mettre la fonction $s \mapsto \frac{s+1}{s^2+s+1}$ sous la forme $\alpha \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} + \beta \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$, les constantes α, β, a, b, c sont à déterminer. En déduire sa transformée de Laplace inverse.

(2) Calculer la transformée de Laplace de l'équation (E3), en déduire $Y(s)$ comme fraction rationnelle en s.

(3) Décomposer la fraction rationnelle obtenue en (1) en éléments simples.

(4) En utilisant la transformée de Laplace inverse, déterminer une solution de (E3).

Corrigé.

(1) On écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{s+1}{s^2+s+1} &= \frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \end{aligned}$$

On reconnait alors les transformée de Laplace de la fonction cos et sin avec un décallage. Donc

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\}(s) = e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \sqrt{3}e^{-t/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

(1) La transformée de Laplace de l'équation (E3) est

$$\left[s^3Y(s) - s^2y(0) - sy''(0) - y(0)\right] - Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

d'où

$$(s^3-1)Y(s) = \frac{1}{s-1} \quad \text{et} \quad Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^3-1)}$$

(2) La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{1}{(s-1)(s^3-1)}$ s'ecrit

$$\frac{1}{(s-1)(s^3-1)} = \frac{1}{(s-1)^2(s^2+x+1)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{(s-1)^2} + \frac{cs+d}{s^2+s+1}$$

et on trouve

$$\frac{1}{(s+1)(s^3-1)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{3}\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

Donc

$$Y(s) = -\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{3}\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

(3) En appliquant la transformée de Laplace inverse, on trouve

$$y(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}(t) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2}\}(t) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+s+1}\}(t)$$

On a $\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}(t) = e^t$ et $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2}\}(t) = \frac{1}{2}te^t$. Il reste à calculer $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+s+1}\}(t)$. Celle-ci a été calculer dans (1).

Finalement

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{6}te^t + \frac{1}{3}e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

Exercice 3. On se propose de trouver une fonction $x \mapsto y(x)$ vérifiant l'équation suivante

$$3y(x) + \int_{\mathbb{R}} (y''(t) - y(t))e^{-|x-t|}dt = \frac{1}{\pi}xe^{-x^2} \tag{E4}$$

On pose

$$f(x) = e^{-|x|} \text{ et } g(x) = \frac{1}{\pi}xe^{-x^2}.$$

(1) Calculer la transformée de Fourier de f.

(2)[Question optionnelle] Soit la fonction $h(x) = e^{-x^2}$ et soit $\widehat{h}$ sa transformée de Fourier. Calculer la dérivée de h, puis appliquer la transformée de Fourier à l'égalité obtenue.

En déduire que $\widehat{h}$ vérifie une équation différentielle de premier degré. Résoudre cette équation différentielle, en déduire que $\widehat{h}(\nu) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\nu^2}$ (on admet que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$).

(3) Déduire la transformée de Fourier de g

(4) Ecrire l'équation (E4) en utilisant un produit de convolution de fonctions.

(5) Soit $\widehat{y}$ la transformée de Fourier de y. En appliquant transformée de Fourier à l'équation obtenue en (4), trouver $\widehat{y}$.

(6) En utilisant la transformée de Fourier inverse, déterminer alors une solution de (E4).

Corrigé.

(1) On trouve $\widehat{f}(\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$.

(2) On a $h'(x) = -2xh(x)$, donc en appliquant la transformée de Fourier, on a

$$\mathcal{F}\{h'(x)\}(\nu) = -2\mathcal{F}\{xh(x)\}(\nu)$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{h'(x)\}(\nu) &= (-2i\pi\nu)\mathcal{F}\{h(x)\}(\nu), \text{ et} \\
\mathcal{F}\{xh(x)\}(\nu) &= \frac{1}{-2i\pi}\mathcal{F}\{(-2i\pi)xh(x)\}(\nu) = \frac{1}{-2i\pi}\frac{d}{d\nu}\mathcal{F}\{h(x)\}(\nu)
\end{aligned}$$

Donc

$$(-2i\pi\nu)\widehat{h}(\nu) = -2\frac{1}{-2i\pi}\frac{d}{d\nu}\widehat{h}(\nu)$$

ou encore

$$\frac{d}{d\nu}\widehat{h}(\nu) = -2\pi^2\nu\widehat{h}(\nu)$$

En résolvant cette équation, on trouve $\widehat{h}(\nu) = Ke^{-\pi^2\nu^2}$ et la constante K est déterminée par $K = \widehat{h}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. Ainsi

$$\widehat{h}(\nu) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\nu^2}$$

(3) On a $\pi g(x) = xe^{-x^2} = xh(x)$. Donc

$$\begin{aligned}
\pi\mathcal{F}\{g(x)\}(\nu) &= \mathcal{F}\{xh(x)\}(\nu) = \frac{1}{-2i\pi}\frac{d}{d\nu}\mathcal{F}\{h(x)\}(\nu) \\
&= = \frac{1}{-2i\pi}\frac{d}{d\nu}(\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\nu^2}) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{-2i\pi}(-2\pi^2\nu)e^{-\pi^2\nu^2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\widehat{g}(\nu) = -i\sqrt{\pi}\nu e^{-\pi^2\nu^2}$$

(4) L'équation s'écrit

$$3y(t) + (y'' - y) \star f(t) = g(t)$$

(5) En appliquant la transformée de Fourier, on a

$$3\mathcal{F}(y)(\nu) + \mathcal{F}(y'' - y)(\nu) \times \mathcal{F}(f)(\nu) = \mathcal{F}(g)(\nu)$$

d'où

$$3\widehat{y}(\nu) + [-4\pi^2\nu^2\widehat{y}(\nu) - \widehat{y}(\nu)]\widehat{f}(\nu) = \widehat{g}(\nu)$$

et par suite

$$\widehat{y}(\nu)\left(3 - (1 + 4\pi^2\nu^2)\widehat{f}(\nu)\right) = \widehat{g}(\nu)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\widehat{y}(\nu) &= \frac{\widehat{g}(\nu)}{3 - (1 + 4\pi^2\nu^2)\widehat{f}(\nu)} \\
&= \frac{\widehat{g}(\nu)}{3 - (1 + 4\pi^2\nu^2) \times \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}} \\
&= \widehat{g}(\nu)
\end{aligned}$$

(6) Par injectivité de la transformée de Fourier, on trouve $y(x) = g(x) = \frac{1}{\pi}xe^{-x^2}$.