chapitre 1
Différentiabilité

15 septembre 2023

Différentiabilité

Comment généraliser la notion de dérivée d'une fonction réelle à valeurs réelle à un champ de vecteurs

$$\mathbf{f}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ ?$$

Différentiabilité

Comment généraliser la notion de dérivée d'une fonction réelle à valeurs réelle à un champ de vecteurs

$$\mathbf{f}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ ?$$

C'est la notion de *différentiabilité* !

Différentiabilité

Définition

Soit $\mathbf{f}$ une fonction définie sur U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$. La fonction $\mathbf{f}$ est **différentiable** en $\mathbf{a} \in U$ s'il existe une **application linéaire L** de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{L}(\mathbf{h}) + o(\|h\|) \tag{1}$$

Différentiabilité

Définition

Soit $\mathbf{f}$ une fonction définie sur U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$. La fonction $\mathbf{f}$ est **différentiable** en $\mathbf{a} \in U$ s'il existe une **application linéaire L** de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{L}(\mathbf{h}) + o(\|h\|) \tag{1}$$

- $o(\|\mathbf{h}\|) = o(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})$ avec $\lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(\mathbf{h}) = 0_{\mathbb{R}^m}$

Différentiabilité

Définition

Soit $\mathbf{f}$ une fonction définie sur U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$. La fonction $\mathbf{f}$ est **différentiable** en $\mathbf{a} \in U$ s'il existe une **application linéaire L** de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{L}(\mathbf{h}) + o(\|h\|) \tag{1}$$

- $o(\|\mathbf{h}\|) = o(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})$ avec $\lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(\mathbf{h}) = 0_{\mathbb{R}^m}$
- L'application **L** est alors unique, on l'appelle la **différentielle** de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ et on la note $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ ou $d\mathbf{f}(\mathbf{a})$. Ce développement s'écrit alors

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + o(\|h\|)$$

Différentiabilité

Un champ vectoriel différentiable en **a** est nécessairement continue en ce point.

Un champ vectoriel $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$$

est différentiable si et seulement si ses composantes $f_i, i = 1, \ldots, m$ sont des champs scalaires différentiables.

Retour à la dimension 1

Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors

$$f \text{ est dérivable en } x \iff f \text{ est différentiable en } x$$

La différentielle est

$$Df(x) \colon h \mapsto f'(x)h$$

Retour à la dimension 1

Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors

$$f \text{ est dérivable en } x \iff f \text{ est différentiable en } x$$

La différentielle est

$$Df(x) \colon h \mapsto f'(x)h$$

Autrement dit, la différentielle est la multiplication par la dérivée.

Ce qu'il faut retenir

la différentiabilité en **a** d'une fonction **f** de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ s'écrit :

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in U \subset \mathbb{R}^n \qquad (2)$$

Ce qu'il faut retenir

la différentiabilité en $\mathbf{a}$ d'une fonction $\mathbf{f}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ s'écrit :

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in U \subset \mathbb{R}^n \tag{2}$$

- L'équation (2) est appelée **formule de Taylor** du premier ordre pour $\mathbf{f}$ au point $\mathbf{a}$.

Ce qu'il faut retenir

la différentiabilité en $\mathbf{a}$ d'une fonction $\mathbf{f}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ s'écrit :

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in U \subset \mathbb{R}^n \tag{2}$$

- L'équation (2) est appelée **formule de Taylor** du premier ordre pour $\mathbf{f}$ au point $\mathbf{a}$.
- $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ est une **application linéaire** de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. C'est une approximation linéaire de $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\cdot) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$,

Ce qu'il faut retenir

la différentiabilité en **a** d'une fonction **f** de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ s'écrit :

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in U \subset \mathbb{R}^n \tag{2}$$

- L'équation (2) est appelée **formule de Taylor** du premier ordre pour **f** au point **a**.
- $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ est une **application linéaire** de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. C'est une approximation linéaire de $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\cdot) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$,
- $D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h})$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Ce qu'il faut retenir

la différentiabilité en $\mathbf{a}$ d'une fonction $\mathbf{f}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ s'écrit :

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in U \subset \mathbb{R}^n \tag{2}$$

- L'équation (2) est appelée **formule de Taylor** du premier ordre pour $\mathbf{f}$ au point $\mathbf{a}$.
- $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ est une **application linéaire** de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. C'est une approximation linéaire de $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\cdot) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$,
- $D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h})$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$.
- et $o(\mathbf{h})$ est un reste qui tend vers $\mathbf{0}$ plus vite que $\|\mathbf{h}\| \to 0$ (i.e. $\frac{o(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \to \mathbf{0}$ si $\|\mathbf{h}\| \to 0$).

Premières propriétés

Linéarité : Si $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont différentiables en $\mathbf{a}$, et si le scalaire λ est constant, alors $\mathbf{f}+\mathbf{g}$, et $\lambda\mathbf{f}$ sont différentiables en $\mathbf{a}$ et on a :

$$D(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a}), \quad D(\lambda\mathbf{f})(\mathbf{a}) = \lambda D\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Premières propriétés

Linéarité : Si $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont différentiables en $\mathbf{a}$, et si le scalaire λ est constant, alors $\mathbf{f}+\mathbf{g}$, et $\lambda\mathbf{f}$ sont différentiables en $\mathbf{a}$ et on a :

$$D(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a}), \quad D(\lambda\mathbf{f})(\mathbf{a}) = \lambda D\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Différentielle d'une constante : Une application $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ constante est différentiable sur U, et pour tout $\mathbf{x} \in U$, on a :

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad : \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,\ D\mathbf{f}(\mathbf{x})(h) = \mathbf{0}.$$

♠1

Premières propriétés

Linéarité : Si $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont différentiables en $\mathbf{a}$, et si le scalaire λ est constant, alors $\mathbf{f}+\mathbf{g}$, et $\lambda\mathbf{f}$ sont différentiables en $\mathbf{a}$ et on a :

$$D(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a}), \quad D(\lambda\mathbf{f})(\mathbf{a}) = \lambda D\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Différentielle d'une constante : Une application $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ constante est différentiable sur U, et pour tout $\mathbf{x} \in U$, on a :

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad : \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,\ D\mathbf{f}(\mathbf{x})(h) = \mathbf{0}.$$

♠1

Différentielle d'une application linéaire : Soit φ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, alors φ est différentiable sur U, et pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$D\varphi(\mathbf{x}) = \varphi \quad : \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,\ D\mathbf{f}(\mathbf{x})(h) = \varphi(h).$$

♠2

Exemples

- La fonction Identité $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Id}(x) = x$, est une application linéaire. Sa différentielle est donc elle-même, c'est-à-dire la fonction Identité : $D\mathbf{Id}(x) = \mathbf{Id}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Exemples

- La fonction Identité $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Id}(x) = x$, est une application linéaire. Sa différentielle est donc elle-même, c'est-à-dire la fonction Identité : $D\mathbf{Id}(x) = \mathbf{Id}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Soit $\mathbf{f} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{f}(M) = M^2$. Alors $\mathbf{f}$ est différentiable en tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$D\mathbf{f}(M)H = MH + HM$$

♠3

Exemples

- La fonction Identité $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Id}(x) = x$, est une application linéaire. Sa différentielle est donc elle-même, c'est-à-dire la fonction Identité : $D\mathbf{Id}(x) = \mathbf{Id}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Soit $\mathbf{f} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{f}(M) = M^2$. Alors $\mathbf{f}$ est différentiable en tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$D\mathbf{f}(M)H = MH + HM$$

♠3

- Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{f}(x) = \|x\|^2$. Alors $\mathbf{f}$ est différentiable en tout $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$Df(x)(h) = 2\langle x, h \rangle$$

♠4

Champs scalaires différentiables

Si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un **champ scalaire** différentiable en x, alors

$$Df(x)(h) = \nabla f(x) \cdot h = \langle \nabla f(x); h \rangle$$

où $\nabla f(x)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ appelé **gradient** de f.

Dérivabilité des fonctions composées

Dans le cas dimension 1, on sait calculer la dérivée d'une fonction composée $\phi(t) = f(g(t))$ par la formule

$$\phi'(t) = f'(g(t))g'(t).$$

Dérivabilité des fonctions composées

Dans le cas dimension 1, on sait calculer la dérivée d'une fonction composée $\phi(t) = f(g(t))$ par la formule

$$\phi'(t) = f'(g(t))g'(t).$$

Nous allons étendre cette formule lorsque

- f est remplacée par un champ vectoriel $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Dérivabilité des fonctions composées

Dans le cas dimension 1, on sait calculer la dérivée d'une fonction composée $\phi(t) = f(g(t))$ par la formule

$$\phi'(t) = f'(g(t))g'(t).$$

Nous allons étendre cette formule lorsque

- f est remplacée par un champ vectoriel $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- g est remplacée par un champ vectoriel $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^p \to U \subset \mathbb{R}^n$.

Différentiabilité des fonctions composées

Théorème

Soient $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *et* $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ *des champs de vecteurs tels que la composition* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ *soit définie dans un voisinage d'un point* $\mathbf{x}_0 \in V$*. Supposons que* $\mathbf{g}$ *soit différentiable en* $\mathbf{x}_0$*, de différentielle* $D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$*. Supposons que* $\mathbf{f}$ *soit différentiable en* $\mathbf{y}_0 := \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$*, de différentielle* $D\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)$*.*

Différentiabilité des fonctions composées

Théorème

Soient $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *et* $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ *des champs de vecteurs tels que la composition* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ *soit définie dans un voisinage d'un point* $\mathbf{x}_0 \in V$*. Supposons que* $\mathbf{g}$ *soit différentiable en* $\mathbf{x}_0$*, de différentielle* $D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$*. Supposons que* $\mathbf{f}$ *soit différentiable en* $\mathbf{y}_0 := \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$*, de différentielle* $D\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)$*.*

Différentiabilité des fonctions composées

Théorème

Soient $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *et* $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ *des champs de vecteurs tels que la composition* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ *soit définie dans un voisinage d'un point* $\mathbf{x}_0 \in V$*. Supposons que* $\mathbf{g}$ *soit différentiable en* $\mathbf{x}_0$*, de différentielle* $D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$*. Supposons que* $\mathbf{f}$ *soit différentiable en* $\mathbf{y}_0 := \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$*, de différentielle* $D\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)$*.*

Alors, $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ *est différentiable en* $\mathbf{x}_0$*, et la différentielle* $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}_0)$ *est donnée par*

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) \circ D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0).$$

Exemple

Soit $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{g}(x) = \|x\|^4$. Alors $\mathbf{f}$ est différentiable en tout $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$Dg(x)(h) = 4\|x\|^2\langle x, h\rangle$$

♠5

Dériver par rapport à un vecteur

On veut ramener la différentiabilité à des dérivations usuelles.

Dériver par rapport à un vecteur

On veut ramener la différentiabilité à des dérivations usuelles.

Définition

Soit $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction donnée. Soit $\mathbf{a} \in U$ et soit $\mathbf{v}$ un vecteur arbitraire dans $\mathbb{R}^n$. La **dérivée de f en a par rapport au vecteur v**, ou la **dérivée directionnelle en a dans la direction v**, notée $\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a})$, est donée par

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t} \tag{3}$$

lorsque la limite existe.

Un exercice

Calculer $\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$ si la fonction f est définie par

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

♠6

Lien entre dérivée directionnelle et différentielle

Théorème

Si $\mathbf{f}$ *est différentiable en* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$*, alors, pour tout* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*,* $\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a})$ *existe et on a :*

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{v})$$

Dérivées partielles

On munit $\mathbb{R}^n$ de la base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un champ vectoriel.

Dérivées partielles

On munit $\mathbb{R}^n$ de la base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un champ vectoriel.

Définition

Dans la définition de dérivée selon un vecteur, si on prend $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k$ (le k-ième vecteur unitaire des coordonnées), la dérivée directionnelle $\partial_{\mathbf{e}_k}\mathbf{f}(\mathbf{a})$ est appelée la **dérivée partielle de f par rapport à $\mathbf{e}_k$** et est également notée $\partial_k\mathbf{f}(\mathbf{a})$. Ainsi, nous notons

$$\partial_k\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \partial_{\mathbf{e}_k}\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Dérivées partielles

On munit $\mathbb{R}^n$ de la base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un champ vectoriel.

Définition

Dans la définition de dérivée selon un vecteur, si on prend $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k$ (le k-ième vecteur unitaire des coordonnées), la dérivée directionnelle $\partial_{\mathbf{e}_k}\mathbf{f}(\mathbf{a})$ est appelée la **dérivée partielle de f par rapport à $\mathbf{e}_k$** et est également notée $\partial_k\mathbf{f}(\mathbf{a})$. Ainsi, nous notons

$$\partial_k\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \partial_{\mathbf{e}_k}\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Dérivées partielles

On munit $\mathbb{R}^n$ de la base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un champ vectoriel.

Définition

Dans la définition de dérivée selon un vecteur, si on prend $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k$ (le k-ième vecteur unitaire des coordonnées), la dérivée directionnelle $\partial_{\mathbf{e}_k}\mathbf{f}(\mathbf{a})$ est appelée la **dérivée partielle de f par rapport à $\mathbf{e}_k$** et est également notée $\partial_k\mathbf{f}(\mathbf{a})$. Ainsi, nous notons

$$\partial_k\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \partial_{\mathbf{e}_k}\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Remarque : On trouve aussi la notation $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.

Relation entre la différentielle et les dérivées partielles

Théorème

Si $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est différentiable en* $\mathbf{a}$*, alors pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$*,* $\partial_i \mathbf{f}(\mathbf{a})$ *existe et on a la relation :*

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{a}),$$

où $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ *dans la base* $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$*.*

Relation entre la différentielle et les dérivées partielles

Théorème

Si $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est différentiable en* $\mathbf{a}$*, alors pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\partial_i \mathbf{f}(\mathbf{a})$ *existe et on a la relation :*

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{a}),$$

où $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ *dans la base* $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Relation entre la différentielle et les dérivées partielles

Théorème

Si $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est différentiable en* $\mathbf{a}$*, alors pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\partial_i \mathbf{f}(\mathbf{a})$ *existe et on a la relation :*

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{a}),$$

où $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ *dans la base* $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Attention : La réciproque est fausse !

Fonctions continûment différentiables

Théorème

Si les différentielles partielles $\partial_i \mathbf{f}$ *existent et sont* **continues** *sur* U*, alors l'application* $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est différentiable sur* U *et on a*

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Fonctions continûment différentiables

Théorème

Si les différentielles partielles $\partial_i \mathbf{f}$ *existent et sont* **continues** *sur* U*, alors l'application* $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est différentiable sur* U *et on a*

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Fonctions continûment différentiables

Théorème

Si les différentielles partielles $\partial_i \mathbf{f}$ *existent et sont* **continues** *sur* U*, alors l'application* $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est différentiable sur* U *et on a*

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Exemple $f : x \mapsto \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$

♠7

Définition

Une fonction $\mathbf{f}$ satisfaisant les hypothèses du théorème précédent est dite **continûment différentiable** sur U.

Exemples

La fonction $f(x,y) = e^{xy}(x+y)$ alors

$$Df(x,y)(h,k) = (h(y(x+y)+1)+k(x(x+y)+1))\, e^{xy}$$

♠8

Dérivées d'ordres supérieurs

Dérivées d'ordres supérieurs

Pour les fonctions de deux variables, il y a quatre dérivées partielles secondes que l'on écrit

$$\partial_1(\partial_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \partial_1(\partial_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \partial_2(\partial_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \partial_2(\partial_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Dérivées d'ordres supérieurs

Pour les fonctions de deux variables, il y a quatre dérivées partielles secondes que l'on écrit

$$\partial_1(\partial_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \partial_1(\partial_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \partial_2(\partial_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \partial_2(\partial_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

En général, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ n'est pas la même chose que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$!

Fonctions deux fois continûment différentiables

Théorème

(Une condition suffisante pour l'égalité des dérivées partielles mixtes). Supposons que f soit un champ scalaire tel que les dérivées partielles $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_{1,2} f$ et $\partial_{2,1} f$ existent sur un ouvert $\mathscr{S}$. Si (x_0, y_0) est un point de $\mathscr{S}$ où $\partial_{1,2} f$ et $\partial_{2,1} f$ sont continues, nous avons alors

$$\partial_{1,2} f(x_0, y_0) = \partial_{2,1} f(x_0, y_0).$$

Fonctions deux fois continûment différentiables

Théorème

(Une condition suffisante pour l'égalité des dérivées partielles mixtes). Supposons que f *soit un champ scalaire tel que les dérivées partielles* $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_{1,2} f$ *et* $\partial_{2,1} f$ *existent sur un ouvert* $\mathscr{S}$. *Si* (x_0, y_0) *est un point de* $\mathscr{S}$ *où* $\partial_{1,2} f$ *et* $\partial_{2,1} f$ *sont continues, nous avons alors*

$$\partial_{1,2} f(x_0, y_0) = \partial_{2,1} f(x_0, y_0).$$

Fonctions deux fois continûment différentiables

Théorème

(Une condition suffisante pour l'égalité des dérivées partielles mixtes). Supposons que f *soit un champ scalaire tel que les dérivées partielles* $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_{1,2} f$ *et* $\partial_{2,1} f$ *existent sur un ouvert* $\mathscr{S}$. *Si* (x_0, y_0) *est un point de* $\mathscr{S}$ *où* $\partial_{1,2} f$ *et* $\partial_{2,1} f$ *sont continues, nous avons alors*

$$\partial_{1,2} f(x_0, y_0) = \partial_{2,1} f(x_0, y_0).$$

Définition

Soit $\mathbf{f}$ une fonction telle que ses dérivées partielles premières et secondes existent et sont continues sur un ouvert S de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathbf{f}$ est dite de **classe** $\mathscr{C}^2$ sur S ou encore **deux fois continûment différentiable** sur S.

Hessienne, Formule de Taylor au second ordre

Définition

Soit f une fonction C^2 au voisinage de $\mathbf{x} \in A \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $H(\mathbf{x})$ ou $D^2 f(\mathbf{x})$ la **matrice hessienne** de f en $\mathbf{x} \in A$, i.e. $H(\mathbf{x}) = [\partial_{x_i, x_j} f(\mathbf{x})]_{1 \leq i,j \leq n}$.

Hessienne, Formule de Taylor au second ordre

Définition

Soit f une fonction C^2 au voisinage de $\mathbf{x} \in A \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $H(\mathbf{x})$ ou $D^2 f(\mathbf{x})$ la **matrice hessienne** de f en $\mathbf{x} \in A$, i.e. $H(\mathbf{x}) = [\partial_{x_i,x_j} f(\mathbf{x})]_{1 \leq i,j \leq n}$.

Hessienne, Formule de Taylor au second ordre

Définition

Soit f une fonction C^2 au voisinage de $\mathbf{x} \in A \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $H(\mathbf{x})$ ou $D^2f(\mathbf{x})$ la **matrice hessienne** de f en $\mathbf{x} \in A$, i.e. $H(\mathbf{x}) = [\partial_{x_i,x_j} f(\mathbf{x})]_{1 \leq i,j \leq n}$. La formule de Taylor au second ordre s'érit au point $\mathbf{x}$:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \frac{1}{2} H(\mathbf{x})\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} + o(\|\mathbf{y}\|^2).$$

Hessienne, Formule de Taylor au second ordre

Définition

Soit f une fonction C^2 au voisinage de $\mathbf{x} \in A \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $H(\mathbf{x})$ ou $D^2 f(\mathbf{x})$ la **matrice hessienne** de f en $\mathbf{x} \in A$, i.e. $H(\mathbf{x}) = [\partial_{x_i,x_j} f(\mathbf{x})]_{1 \leq i,j \leq n}$. La formule de Taylor au second ordre s'érit au point $\mathbf{x}$:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \frac{1}{2} H(\mathbf{x})\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} + o(\|\mathbf{y}\|^2).$$

Si f est C^2 sur A, on en déduit que $H(\mathbf{x})$ est symétrique.

Hessienne, Formule de Taylor au second ordre

Définition

Soit f une fonction C^2 au voisinage de $\mathbf{x} \in A \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $H(\mathbf{x})$ ou $D^2 f(\mathbf{x})$ la **matrice hessienne** de f en $\mathbf{x} \in A$, i.e. $H(\mathbf{x}) = [\partial_{x_i, x_j} f(\mathbf{x})]_{1 \leq i,j \leq n}$. La formule de Taylor au second ordre s'érit au point $\mathbf{x}$:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \frac{1}{2} H(\mathbf{x})\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} + o(\|\mathbf{y}\|^2).$$

Si f est C^2 sur A, on en déduit que $H(\mathbf{x})$ est symétrique.
Si $\mathbf{x}$ est un **point critique** (c-à-d. $\nabla f(x) = 0$) alors la formule de Taylor s'écrit

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} H(\mathbf{x})\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} + o(\|\mathbf{y}\|^2).$$

Nature des points stationnaires

Le théorème suivant relie la nature des points stationnaires et le spectre de la matrice hessienne.

Nature des points stationnaires

Le théorème suivant relie la nature des points stationnaires et le spectre de la matrice hessienne.

Théorème

Soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* x_0 *un* **point stationnaire** *de* f. *On suppose que* f *est de classe* C^2 *au voisinage* $\mathscr{B}(\mathbf{x}_0)$ *de* $\mathbf{x}_0$. *Soit* $H(\mathbf{x}_0)$ *la* **hessienne de** f **au point** $\mathbf{x}_0$. *Alors*

Nature des points stationnaires

Le théorème suivant relie la nature des points stationnaires et le spectre de la matrice hessienne.

Théorème

Soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* x_0 *un* **point stationnaire** *de* f*. On suppose que* f *est de classe* C^2 *au voisinage* $\mathscr{B}(\mathbf{x}_0)$ *de* $\mathbf{x}_0$*. Soit* $H(\mathbf{x}_0)$ *la* **hessienne de** f **au point** $\mathbf{x}_0$*. Alors*

Nature des points stationnaires

Le théorème suivant relie la nature des points stationnaires et le spectre de la matrice hessienne.

Théorème

Soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* x_0 *un* **point stationnaire** *de* f*. On suppose que* f *est de classe* C^2 *au voisinage* $\mathscr{B}(\mathbf{x}_0)$ *de* $\mathbf{x}_0$*. Soit* $H(\mathbf{x}_0)$ *la* **hessienne de** f **au point** $\mathbf{x}_0$*. Alors*

- *Si toutes les valeurs propres de* $H(\mathbf{x}_0)$ *sont positives strictement,* f *a un minimum relatif en* $\mathbf{x}_0$*,*

Nature des points stationnaires

Le théorème suivant relie la nature des points stationnaires et le spectre de la matrice hessienne.

Théorème

Soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* x_0 *un* **point stationnaire** *de* f*. On suppose que* f *est de classe* C^2 *au voisinage* $\mathscr{B}(\mathbf{x}_0)$ *de* $\mathbf{x}_0$*. Soit* $H(\mathbf{x}_0)$ *la* **hessienne de** f **au point** $\mathbf{x}_0$*. Alors*

- *Si toutes les valeurs propres de* $H(\mathbf{x}_0)$ *sont positives strictement,* f *a un minimum relatif en* $\mathbf{x}_0$*,*

Nature des points stationnaires

Le théorème suivant relie la nature des points stationnaires et le spectre de la matrice hessienne.

Théorème

Soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et x_0 un **point stationnaire** *de f. On suppose que f est de classe C^2 au voisinage $\mathscr{B}(\mathbf{x}_0)$ de $\mathbf{x}_0$. Soit $H(\mathbf{x}_0)$ la* **hessienne de f au point $\mathbf{x}_0$**. *Alors*

- *Si toutes les valeurs propres de $H(\mathbf{x}_0)$ sont positives strictement, f a un minimum relatif en $\mathbf{x}_0$,*
- *Si toutes les valeurs propres de $H(\mathbf{x}_0)$ sont négatives strictement, f a un maximum relatif en $\mathbf{x}_0$,*

Nature des points stationnaires

Le théorème suivant relie la nature des points stationnaires et le spectre de la matrice hessienne.

Théorème

Soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* x_0 *un* **point stationnaire** *de* f*. On suppose que* f *est de classe* C^2 *au voisinage* $\mathscr{B}(\mathbf{x}_0)$ *de* $\mathbf{x}_0$*. Soit* $H(\mathbf{x}_0)$ *la* **hessienne de** f **au point** $\mathbf{x}_0$*. Alors*

- *Si toutes les valeurs propres de* $H(\mathbf{x}_0)$ *sont positives strictement,* f *a un minimum relatif en* $\mathbf{x}_0$*,*
- *Si toutes les valeurs propres de* $H(\mathbf{x}_0)$ *sont négatives strictement,* f *a un maximum relatif en* $\mathbf{x}_0$*,*

Nature des points stationnaires

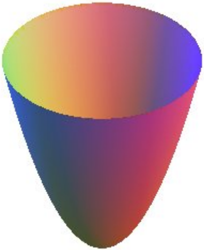
Le théorème suivant relie la nature des points stationnaires et le spectre de la matrice hessienne.

Théorème

Soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* x_0 *un* **point stationnaire** *de* f*. On suppose que* f *est de classe* C^2 *au voisinage* $\mathscr{B}(\mathbf{x}_0)$ *de* $\mathbf{x}_0$*. Soit* $H(\mathbf{x}_0)$ *la* **hessienne de** f **au point** $\mathbf{x}_0$*. Alors*

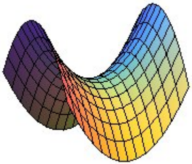
- *Si toutes les valeurs propres de* $H(\mathbf{x}_0)$ *sont positives strictement,* f *a un minimum relatif en* $\mathbf{x}_0$*,*
- *Si toutes les valeurs propres de* $H(\mathbf{x}_0)$ *sont négatives strictement,* f *a un maximum relatif en* $\mathbf{x}_0$*,*
- *Si* $H(\mathbf{x}_0)$ *possède au moins une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, alors* $\mathbf{x}_0$ *est un point-selle (ou point col) pour* f*.*

Exemple 1 : surface d'équation $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ (paraboloïde de révolution). L'origine est un minimum global



♠9

Exemple 2 : surface d'équation $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ (paraboloïde hyperbolique). Il y a un point-selle à l'origine.



♠10

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 - x^2y^2 + y^3 - 18x^2 + 3y^2$.
Trouver les extrema de f
♠11

Opérateurs différentiels de la physique

(1) Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on définit pour $\mathbf{x} \in \Omega$, le vecteur

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right) \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

appelé le **gradient** de f.

Opérateurs différentiels de la physique

(1) Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on définit pour $\mathbf{x} \in \Omega$, le vecteur

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right) \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

appelé le **gradient** de f.
(2) Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ on définit pour $\mathbf{x} \in \Omega$, le scalaire

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \tag{5}$$

appelé le **laplacien** de f.

(3) Si $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathbf{x} \in \Omega$, avec $F(\mathbf{x}) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$, on définit le scalaire

$$\operatorname{div} F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \tag{6}$$

appelé la **divergence** de F. On peut écrire symboliquement, $\operatorname{div} F(\mathbf{x}) = \nabla \cdot F(\mathbf{x})$, où $\cdot$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^m$.

(3) Si $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathbf{x} \in \Omega$, avec $F(\mathbf{x}) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$, on définit le scalaire

$$\operatorname{div} F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \tag{6}$$

appelé la **divergence** de F. On peut écrire symboliquement, $\operatorname{div} F(\mathbf{x}) = \nabla \cdot F(\mathbf{x})$, où $\cdot$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^m$.

(4) Si $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathbf{x} \in \Omega$, avec $F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \ldots, F_m(\mathbf{x}))$, on définit le vecteur

$$\operatorname{rot} F(\mathbf{x}) = \left((-1)^{i+j} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \right) \right)_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \in \mathbb{R}^{\frac{m(m-1)}{2}} \tag{7}$$

appelé le **rotationel** de F.

(3) Si $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathbf{x} \in \Omega$, avec $F(\mathbf{x}) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$, on définit le scalaire

$$\operatorname{div} F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \tag{6}$$

appelé la **divergence** de F. On peut écrire symboliquement, $\operatorname{div} F(\mathbf{x}) = \nabla \cdot F(\mathbf{x})$, où $\cdot$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^m$.
(4) Si $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathbf{x} \in \Omega$, avec $F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \ldots, F_m(\mathbf{x}))$, on définit le vecteur

$$\operatorname{rot} F(\mathbf{x}) = \left((-1)^{i+j} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \right) \right)_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \in \mathbb{R}^{\frac{m(m-1)}{2}} \tag{7}$$

appelé le **rotationel** de F.
Si $N = 2$, alors

$$\operatorname{rot} F(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \tag{8}$$

Si $N = 3$, alors

$$\operatorname{rot} F(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right) \in \mathbb{R}^3 \tag{9}$$

Dans ce cas, nous pouvons écrire symboliquement,
$\operatorname{rot} F(\mathbf{x}) = \nabla \wedge F(\mathbf{x})$, où $\wedge$ est le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

Les propriétés suivantes sont faciles à établir. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
(1) Soit $f \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, alors

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f. \tag{10}$$

Les propriétés suivantes sont faciles à établir. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
(1) Soit $f \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, alors

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f. \tag{10}$$

(2) Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $F \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ alors

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= 0 & (11)\\ \operatorname{grad} \operatorname{rot} F &= 0 & (12) \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont faciles à établir. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
(1) Soit $f \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, alors

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f. \tag{10}$$

(2) Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $F \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ alors

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= 0 \qquad (11) \\ \operatorname{grad} \operatorname{rot} F &= 0 \qquad (12) \end{aligned}$$

(3) Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $g \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ alors

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f \Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g. \tag{13}$$

(4) Soient $f, g \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ alors

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f. \tag{14}$$

(4) Soient $f, g \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ alors

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f. \tag{14}$$

(5) Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $F \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ alors

$$\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \cdot \operatorname{grad} f. \tag{15}$$

(4) Soient $f, g \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ alors

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f. \tag{14}$$

(5) Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $F \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ alors

$$\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \cdot \operatorname{grad} f. \tag{15}$$

(6) Soit $F \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ alors

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} F = -\Delta F + \operatorname{grad}\operatorname{div} F, \tag{16}$$

où $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$.

(4) Soient $f, g \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ alors

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f. \tag{14}$$

(5) Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $F \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ alors

$$\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \cdot \operatorname{grad} f. \tag{15}$$

(6) Soit $F \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ alors

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = -\Delta F + \operatorname{grad} \operatorname{div} F, \tag{16}$$

où $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$.
(7) Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $F \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ alors

$$\operatorname{rot}(fF) = \operatorname{grad} f \wedge F + f \operatorname{rot} F. \tag{17}$$

Exercice

Soient $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ et r tels que

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}$$

Soit $f(r) = \frac{1}{r}$. Calculons $F = \operatorname{grad} f$, Δf et $\operatorname{div} F$.

Exercice

Soient $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et r tels que

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}$$

Soit $f(r) = \frac{1}{r}$. Calculons $F = \operatorname{grad} f$, Δf et $\operatorname{div} F$.
♠12

Exercice

Soit le champs de vecteurs

$$F(x,y,z) = (x^2 - e^y, \sin z, y^2 + z)$$

On a

Exercice

Soit le champs de vecteurs

$$F(x,y,z) = (x^2 - e^y, \sin z, y^2 + z)$$

On a Calculer $\operatorname{div} F$.
♠13

Exercices

Soit $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et de sa base canonique (orthonormée) $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Déterminer la différentielle des champs scalaires suivants

(a) $\varphi(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{x}_0|\mathbf{x}\rangle$, le vecteur $\mathbf{x}_0$ étant fixé (forme linéaire) ;
(b) $h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$.
(c) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^4$.

(a) φ est linéaire

$$\varphi(x+\lambda y) = \langle x_0, x+\lambda y\rangle = \langle x_0, x\rangle + \lambda \langle x_0, y\rangle = \varphi(x) + \lambda \varphi(y)$$

on a donc $D\varphi(x) = \varphi$ pour tout x et $\partial_y \varphi(x) = \langle x_0 | y\rangle$.

(a) φ est linéaire

$$\varphi(x+\lambda y) = \langle x_0, x+\lambda y\rangle = \langle x_0, x\rangle + \lambda\langle x_0, y\rangle = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$$

on a donc $D\varphi(x) = \varphi$ pour tout x et $\partial_y\varphi(x) = \langle x_0|y\rangle$.
(b) Attention h n'est pas linéaire (par exemple $h(2x) = \|2x\|^2 = 4\|x\|^2 = 4h(x)$).

(a) φ est linéaire

$$\varphi(x+\lambda y)=\langle x_0,x+\lambda y\rangle=\langle x_0,x\rangle+\lambda\langle x_0,y\rangle=\varphi(x)+\lambda\varphi(y)$$

on a donc $D\varphi(x)=\varphi$ pour tout x et $\partial_y\varphi(x)=\langle x_0|y\rangle$.
(b) Attention h n'est pas linéaire (par exemple $h(2x)=\|2x\|^2=4\|x\|^2=4h(x)$).
On a

$$\begin{aligned}
h(x+a)-h(x) &= \|x+a\|^2-\|x\|^2\\
&= (\langle x+a|x+a\rangle=\langle x|x+a\rangle+\langle a|x+a\rangle)-\|x\|^2\\
&= (\langle x|x\rangle+\langle x|a\rangle+\langle a|x\rangle+\langle a|a\rangle)-\|x\|^2\\
&= \left(\|x\|^2+2\langle x|a\rangle+\|a\|^2\right)-\|x\|^2\\
&= 2\langle x|a\rangle+\|a\|^2
\end{aligned}$$

Comme $a\mapsto\langle x|a\rangle$ est linéaire, $D_ah(x)dDh(x)(a)=2\langle x|a\rangle$.

(c) La fonction $f(x) = \|x\|^4$ s'écrit $g \circ h$

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, h(x) = \|x\|^2$$

et

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = t^2$$

h et g sont différentiable et on sait que

$$D(g \circ h)(x) = Dg(h(x)) \circ Dh(x)$$

On a déjà calculer la différentielle de h, $Dh(x)(a) = 2\langle x|a\rangle$.
La différentielle de g est $Dg(t)(s) = sg'(t)$
Donc

$$\begin{aligned}
\partial_y f(x) = Df(x)(y) &= \left[Dg(h(x)) \circ Dh(x)\right](y) \\
&= Dg(h(x))\left(Dh(x)(y)\right) \\
&= Dh(x)(y) \times g'(h(x)) = 2\langle x|y\rangle \times 2h(x) \\
&= 4||x||^2 \langle x|y\rangle
\end{aligned}$$