**Exercice 1.** $\boxed{\star}$ Soit $H$ un espace de Hilbert et $F$ un sous-espace fermé de $H$. Montrer que

(a) $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

(b) Si codim $F := \dim H/F = 1$ alors $\dim F^{\perp} = 1$.

**Exercice 2.** $\boxed{\star}$ Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert si et seulement si $p = 2$.

**Exercice 3.** $\boxed{\star}$ Soit

$$F := \left\{x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) : x_{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$$

(a) Montrer que $F$ est un sous-espace fermé de $\ell^2(\mathbb{N})$.

(b) Déterminer $F^{\perp}$.

**Exercice 4.** $\boxed{\star}$ Soit $H$ un espace de Hibert, et $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$ une suite de sous-espaces fermés de $H$. Soit

$$F = \overline{\operatorname{Vect}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} F_n\right)}$$

(a) Montrer que $d(x, F) = \lim_{n\to\infty} d\left(x, F_n\right), \forall x \in H$.

(b) Montrer que $p_F(x) = \lim_{n\to\infty} p_{F_n}(x), \forall x \in H$.

**Exercice 5.** $\boxed{\star}$ Soient $(X, \|\cdot\|_1)$ et $(Y, \|\cdot\|_2)$ deux espaces normés, et $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ un opérateur linéaire borné. La norme $\|T\|$ est définie par

$$\|T\| := \inf_{x\in X} \{M : \|Tx\|_2 \leq M\|x\|_1\}$$

(a) Montrer que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Tx\|_2 = \sup_{\|x\|_1\leq 1} \|Tx\|_2 = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}$$

(b) Montrer que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1<1} \|Tx\|_2$$

**Exercice 6.** $\boxed{\star}$ On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([-1,1])$ équipé du produit hermitien

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt, \quad x, y \in H$$

(1) Soit $E = \left\{f \in H : \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\right\}$.

(a) Montrer que $E$ est fermé dans $H$. Trouver $E^{\perp}$.

(b) Calculer la distance de $f$ à $E$ où $f(t) = t^2$.

(2) Soit $F = \{x \in H : \quad f(-t) = f(t), \quad t \in [-1,1]\}$.

(a) Montrer que $F$ est fermé dans $H$. Trouver $F^{\perp}$.

(b) Calculer la distance de $f$ à $F$ où $f(t) = e^t$.

**Exercice 7.** $\boxed{\star}$ Soit $a, b$ deux nombres réels avec $a < b$. Considérons l'espace de Hilbert $L^2([a,b])$ sur $\mathbb{R}$ et l'opérateur $T : L^2([a,b]) \to \mathbb{R}$ défini par

$$Tf = \int_a^b f(x)dx, \quad f \in L^2([a,b]).$$

(a) Montrer que $T$ est borné. Calculer $\|T\|$.

(b) D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $g \in L^2([a,b])$ telle que

$$Tf = \langle f, g\rangle \text{ pour tout } f \in L^2([a,b])$$

Trouver une fonction $g$ vérifiant $\|g\|_{L^2} = \|T\|$.

**Exercice 8.** $\boxed{\star}$ Soit $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres complexes et soit $D$ l'opérateur défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par

$$Dx = (c_1x_1, c_2x_2, \ldots) \text{ pour } x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N})$$

Montrer que $D$ est borné si et seulement si la suite $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée, et dans ce cas $\|D\| = \sup_n |c_n|$.

**Exercice 9.** $\boxed{\star}$ Dans l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{N})$ on considère l'opérateur shift defini par

$$L : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), \quad x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto Lx = (x_2, x_3, \ldots)$$

Montrer que $L$ iest un opérateur linéaire bornné et calculer $\|L\|$.

**Exercice 10.** $\boxed{\star\star}$ Soit $L^2([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Soit l'opérateur $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ defini par

$$Tf(x) = \int_0^x f(y)dy$$

Montrer que $T$ est un opérateur linéaire borné. Calculer $\|T\|$.

**Exercice 11.** $\boxed{\star\star}$ Soit $T : \mathscr{C}([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$ l'opérateur donné par

$$(Tx)(t) = t\int_0^t x(s)ds$$

(a) Montrer que $T$ est un opérateur linéaire borné. Calculer $\|T\|$.
(b) Montrer que l'inverse $T^{-1} : \text{Im}(T) \to \mathscr{C}[0,1]$ existe et qui'il est non borné.

**Exercice 12.** $\boxed{\star\star}$ Soit $1 < p < \infty$ et $q$ son conjugué. Pour $f \in L^p(]0,\infty[)$, soit

$$(Tf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(tx)dt$$

Montrer que :
(a) $Tf$ est bien définit sur $]0,\infty[$, et que $x \mapsto Tf(x)$ est continue
(b) $Tf \in L^p(]0,\infty[)$.
(c) $T$ est un opérateur linéaire borné de $L^p(]0,\infty[)$ dans lui même. Calculer sa norme. (Indication : utiliser $f_n = x^{-1/p}\mathbb{1}_{\{1\le x\le n\}}$.)

**Exercice 13.** $\boxed{\star}$ Soit $T_1, T_2, \ldots : \ell^1 \to \ell^\infty$ les opérateurs linéaires :

$$T_1(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_1, x_1, x_1, \ldots)$$
$$T_2(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_2, x_2, x_2, \ldots)$$
$$T_3(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, x_3, \ldots) \ldots \text{ etc}$$

Montrer que la suite $(T_n)_n$ converge fortement mais pas pas uniformément.

**Exercice 14.** $\boxed{\star}$ On considère l'espace de Hilbert réel $L^2(\mathbb{R})$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donnés, $\alpha < \beta$, on note

$$C = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \alpha \le f(x) \le \beta \text{ p.p. }\}$$

(1) Montrer que $C$ est vide si et seulement si $\alpha\beta > 0$.
On suppose désormais que $\alpha\beta \le 0$.
(2) Montrer que $C$ est un convexe fermé de $L^2$.
(3) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, montrer que sa projection orthogonale sur $C$ est donnée par

$$p_C f(x) = \max\{\min\{f(x), \beta\}, \alpha\} \text{ p.p.}$$

**Exercice 15.** $\boxed{\star}$ On considère l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ et $T$ l'opérateur (dit de Hilbert Schmidt) de noyau $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$ défini par

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)K(x,y)dy, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \ x \in \mathbb{R}$$

(1) Montrer que $T$ est bien défini.
(2) Montrer que l'opérateur linéaire $T$ est continue et que $\|T\| \le \|K\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.
(3) Montrer que l'adjoint $T^*$ de $T$ est l'opérateur intégral de noyau $(x,y) \mapsto \overline{K(y,x)}$,

$$T^*(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{K(x,y)}dy, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \ x \in \mathbb{R}$$

**Exercice 16.** $\boxed{\star}$ Soit $H$ un espace de Hilbert et soit $(x_n)$ une suite de $H$ qui converge faiblement vers $x_0 \in H$. Montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \ge \|x_0\|$$

**Exercice 17.** $\boxed{\star}$ Soit $H$ un espace de Hilbert et $(x_n)$ une suite de $H$ qui converge faiblement vers $x$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \iff \|x\| \ge \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|$$

**Exercice 18.** ⋆⋆ Soit $H$ un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathscr{L}(H)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$(i)$ $T$ est inversible ;

$(i')$ $T^*$ est inversible ;

$(ii)$ il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ et $\|T^*x\| \geqslant c\|x\|$ pour tout $x \in H$ ( pour montrer que (ii) implique (i), on montrera que $\operatorname{Im} T$ est à la fois fermée et dense dans $H$ ).

**Exercice 19.** ⋆⋆ (Théorème de Lax-Milgram et application).
Soit $H$ un espace de Hilbert réel. On considère une forme bilinéaire $B$ sur $H$, que l'on suppose continue et coercive, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $C < +\infty$ et $a > 0$ telles que $|B(x, y)| \leqslant C\|x\|\|y\|$ pour tous $x, y \in H$, et $B(x, x) \geqslant a\|x\|^2$ pour tout $x \in H$.

(1) (a) Montrer qu'il existe un opérateur continu $T$ sur $H$ tel que $B(x, y) = (Tx \mid y)$ pour tous $x, y \in H$.

(b) Montrer que pour tout $x \in H$, $\|Tx\| \geqslant a\|x\|$. En déduire que $T$ est un isomorphisme de $H$ sur lui-même (utiliser l'Exercice 11).

(2) (Théorème de Lax-Milgram). Soit $L$ une forme linéaire continue sur $H$.

(a) Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique $u \in H$ tel que $B(u, y) = L(y)$ pour tout $y \in H$.

(b) On suppose dans cette question que $B$ est symétrique et on définit $J(x) = B(x, x) - 2L(x)$. Démontrer que le point $u$ est caractérisé par la condition $J(u) = \min_{x \in H} J(x)$.

(3) (Application : approximation de Galerkin) On reprend les notations de (2) (a). Soit $(F_n)_{n \geqslant 1}$ une suite croissante de sous espaces vectoriels fermés de $H$ dont la réunion est dense dans $H$.

(a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un unique $u_n \in F_n$ tel que $B(u_n, y) = L(y)$ pour tout $y \in F_n$.

(b) Démontrer que $\|u - u_n\| \leqslant (C/a) d(u, F_n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. En déduire que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $u$.

**Exercice 20.** ⋆⋆ On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, \mu)$, où $\mu$ est la mesure positive définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall \phi \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}) \quad \mu(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} dx$$

(1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme unique $\tilde{P}_n$ de degré $n$ tel que

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right) = (-1)^n e^{-x^2/2} \tilde{P}_n(x)$$

$\tilde{P}$ est appelé polynôme d'Hermite de degré $n$.

(2) On note, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \tilde{P}_n / \sqrt{n!}$. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $H$

(3) (a) Soit $\phi \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(p_n)_{n \in N}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} p_n(x) e^{-x^2/8} = \phi(x) e^{-x^2/8}$$

uniformément sur $\mathbb{R}$ (On admettra que l'ensemble des fonctions polynomiales de la forme $e^{-x^2} P(x)$, $P \in \mathbb{R}[x]$, est dense dans $\mathscr{C}(\mathbb{R})$).

(b) En déduire que $(p_n)_{n \in N}$ converge vers $\phi$ dans $H$.

(4) Déduire que la famille $(P_n)$ est une base hilbertienne de $H$.

**Exercice 21.** ⋆⋆ On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, et $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.

(1) Montrer que si $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ et si $\bar{D} = \bar{D}(z_0, r_0)$ est un disque fermé contenu dans $\mathbb{D}$, alors

$$f(z_0) = \frac{1}{r_0^2} \int_{\bar{D}} f(w) dA(w)$$

où $A = \frac{1}{\pi} \lambda_2$ est la mesure d'aire normalisée de $\mathbb{D}$ (i.e. la restriction à $\mathbb{D}$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, divisée par $\pi$ : $\frac{1}{\pi} dx dy$). En déduire que pour tout point $z \in \mathbb{D}$ et pour toute fonction $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, on a :

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{(1 - |z|)^2} \|f\|_{L^2(\mathbb{D})},$$

où l'on a posé $\|f\|_{L^2(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f|^2 dA\right)^{1/2}$.

(2) On définit l'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D})$ par $B^2(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})$, c'est-à-dire que $f \in B^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ et $\int_{\mathbb{D}} |f|^2 dA < +\infty$. On le munit de la norme induite par $L^2(\mathbb{D})$.

(a) En utilisant le (1), montrer que si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $B^2(\mathbb{D})$, alors $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformément de Cauchy sur tout compact de $\mathbb{D}$.

(b) Montrer que $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert, et que la convergence dans $B^2(\mathbb{D})$ entraine la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{D}$. Donner l'expression du produit scalaire de $B^2(\mathbb{D})$.

(3) (a) Montrer que si $f \in B^2(\mathbb{D})$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, alors

$$\|f\|^2_{B^2(\mathbb{D})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1}$$

(b) On pose $e_n(z) = \sqrt{n+1} z^n$. Montrer que la suite $(e_n)_{n\geqslant 0}$ est une base orthonormée de $B^2(\mathbb{D})$. Donner une autre expression du produit scalaire de $B^2(\mathbb{D})$

(4) Montrer que si $a \in \mathbb{D}$, alors il existe une unique fonction $K_a \in B^2(\mathbb{D})$ telle que $f(a) = (f \mid K_a)$ pour toute $f \in B^2(\mathbb{D})$ (on dit que $K_a$ est un noyau reproduisant pour $B^2(\mathbb{D})$).

(5) En utilisant le (3), déterminer explicitement la fonction $K_a$, pour tout $a \in \mathbb{D}$.

(6) En conclure que si $f$ est une fonction holomorphe au voisinage de $\mathbb{D}$, alors, pour tout point $a \in \mathbb{D}$, on a $f(a) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z)}{(1-\bar{z}a)^2} dA(z)$.

**Exercice 22.** $\boxed{\star\star}$ Soit $H$ un espace de Hilbert et soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et compact.

(1) Montrer qu'il existe un famille (finie ou infinie) $\{e_1, e_2, \ldots\}$ de vecteurs propres de $T$ correspondant aux valeurs propres $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ telle que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$.
Montrer que si cette famille est infinie, alors $\lambda_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(2) Montrer que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad \forall x \in H.$$

**Exercice 23.** $\boxed{\star\star}$ Soit $\mu$ la mesure positive sur $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\forall \phi \in \mathscr{C}_c\left(\mathbb{R}^+\right) \quad \mu(\phi) = \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-x} dx,$$

et soit $H$ l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+, \mu)$. La norme de $H$ est donc donnée par

$$\|f\|^2 = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x} dx.$$

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n\right).$$

(1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $L_n$ est un polynôme de degré $n$. (Les polynôme $L_n$ sont appelés polynômes de Laguerre).

(2) (a) Calculer le produit scalaire $\langle x^k, L_n \rangle_H$, pour $0 \leq k \leq n$.

(b) En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de l'espace $H$.

(3) Montrer que si $\alpha$ est un réel positif ou nul, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} L_n(x) e^{-x} dx\right]^2 = \frac{1}{2\alpha+1}$$

En déduire que la fonction $f_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x}$ appartient à l'adhérence de $\mathrm{Vec}(L_n, n \in \mathbb{N})$ dans $H$.

(4) Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est totale dans $\mathscr{C}_c\left(\mathbb{R}^+\right)$. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $H$.

**Exercice 24.** $\boxed{\star\star}$ Soit $T$ l'opérateur sur l'espace de Hilbert $H = L^2(]0, +\infty[)$ défini par

$$\forall f \in H \quad \forall x \in ]0, +\infty[, \quad Tf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y} dy.$$

(1) Montrer que $T$ est un opérateur linéaire continu sur $H$ et que $\|T\| = \pi$.

(2) Soit $L$ l'opérateur défini sur $H$ par

$$\forall f \in H \quad \forall x \in ]0, +\infty[ \quad Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(y) e^{-xy} dy$$

$L$ est la transformation de Laplace sur $L^2(]0, +\infty[)$.

Montrer que $L$ est un opérateur linéaire continu auto-adjoint sur $H$ et que $L^2 = T$. En déduire que $T$ est un opérateur auto-adjoint positif et que $\|L\| = \sqrt{\pi}$.

(3) Montrer que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathscr{C}([0, +\infty[)$ et en déduire que 0 est valeur spectrale de $T$.

(4) Montrer que $L$ est injectif. En déduire que 0 n'est pas valeur propre de $T$.

(5) Montrer que $[0, \pi]$ est le plus petit intervalle contenant le spectre de $T$.

**Exercice 25.** $\boxed{\star\star}$ Soit $E$ l'espace préhilbertien $\mathscr{C}([-1,1])$ muni du produit scalaire induit par $L^2([-1,1])$. On définit sur $E$ l'opérateur à noyau

$$Tf(x) = \int_{-1}^{1} K(x,y) f(y) dy$$

où

$$K(x,y) = \begin{cases} 1/2 - \log 2 + (1/2)\log((1-y)(1+x)] & \text{si} \quad -1 < y \le x, \\ 1/2 - \log 2 + (1/2)\log[(1+y)(1-x)] & \text{si} \quad 1 > y \ge x. \end{cases}$$

(1) Montrer que l'opérateur $T$ est un opérateur auto-adjoint compact de $E$ dans $E$.

(2) On considère l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $[-1,1]$ :

$$\left(\left(1-x^2\right) y'\right)' = g, \tag{1}$$

avec $g \in E$. Une solution de (3) est, par définition, une fonction de classe $C^1$ sur l'intervalle $[-1,1]$ satisfaisant l'équation (3) sur $[-1,1]$.

Montrer que (3) admet une solution dans $E$ si et seulement si $\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0$ et que, dans ce cas, les solutions de (3) sont données par

$$y = Tg + C, \qquad \text{avec} \qquad C \in \mathbb{K},$$

la fonction $f = Tg$ étant l'unique solution de (3) telle que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.$$

(3) Montrer que $\mathrm{Ker}\, T$ est égal à l'ensemble des fonctions constantes sur $[-1,1]$ et que $\overline{\mathrm{Im} T}$ est l'ensemble des éléments de $E$ d'intégrale nulle sur $[-1,1]$.

(4) Vérifier que, si $g \in E$, alors

$$(Tg \mid g) = -\int_{-1}^{1} \left|(Tg)'(x)\right|^2 \left(1-x^2\right) dx$$

En déduire que l'opérateur $-T$ est auto-adjoint positif.

(5) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Legendre

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\left(1-x^2\right) P_n'\right)' = -n(n+1)P_n.$$

(équation différentielle de Legendre). En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de $T$. Vérifier également que la famille $(P_n/\|P_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $E$. Enfin, retrouver que $-T$ est auto-adjoint positif.

(6) Calculer $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.