Exercice 1. $\boxed{\star}$ Soit $f(x) := \min\{1, 1/|x|\}$. Montrer que $f \notin L^1(\mathbb{R})$ mais que $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. $\boxed{\star}$ Soient $X = \mathbb{N}$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

(1) Soit f définie sur X par $f(n) := 1/n$.
Montrer que $f \notin L^1(X)$ mais que $f \in L^p(X)$, $1 < p \leqslant \infty$.

(2) Dans le cas où $X = \mathbb{R}$, considérons la fonction définie par :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Montrer alors que $f \notin L^1(X)$, mais que $f \in L^p(X)$, $1 < p \leqslant \infty$.

Exercice 3. $\boxed{\star}$ Soient $X = \mathbb{N}$ et μ la mesure sur $\mathbb{N}$ qui prend la valeur $1/n^2$ au point n.

(1) Montrer que $\mu(X) < \infty$.

(2) Soit f définie sur X par $f(n) := \sqrt{n}$. Montrer alors que

$$f \in L^p(X) \iff 1 \leqslant p < 2$$

(3) Pour un exemple similaire, considérez $X =]0, 1[$ avec la mesure de Lebesgue et f définie par $f(x) := 1/\sqrt{x}$.

Exercice 4. $\boxed{\star}$ Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Supposons que $\mu(X) < \infty$. Soit f est une fonction mesurable sur X, et soit $E_n := \{x \in X \;:\; (n-1) \leqslant |f(x)| < n\}$.

(1) Montrer que

$$f \in L^1(X) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) < +\infty$$

(2) Montrer, plus généralement, que

$$f \in L^p(X) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^p\mu(E_n) < \infty, \quad 1 \leqslant p < \infty$$

Exercice 5. $\boxed{\star}$ Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré fini et $f \in L^p(X)$. Montrer alors que $f \in L^r(X)$ pour $1 \leqslant r \leqslant p$ et que

$$\|f\|_r \leqslant \mu(X)^s \|f\|_p$$

où $s := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

Exercice 6. $\boxed{\star}$ Soit $X =]0, \infty[$, munit de la mesure de Lebesgue, et f la fonction définie sur X par

$$f(x) := x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1}$$

Montrer que

$$f \in L^p(X) \iff p = 2$$

Exercice 7. $\boxed{\star}$ Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ avec $p_1 < p_2$ et soit f une fonction mesurable sur X.

Montrer que que si $f \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$, alors $f \in L^p(X)$ pour toute valeur de p telle que $p_1 \leqslant p \leqslant p_2$.

Exercice 8. $\boxed{\star}$ Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $L^1(X)$. Soit $f \in L^1(X)$ et supposons que $f_n \longrightarrow f$ p.p.

Montrer alors que

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \|f_n\|_1 - \|f\|_1 - \|f_n - f\|_1 \Big| = \lim_{n\to\infty} \int \Big| |f_n| - |f| - |f_n - f| \Big| d\mu = 0$$

En déduire que si

$$\|f_n\|_1 \longrightarrow \|f\|_1 < \infty$$

alors

$$\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$$

Exercice 9. $\boxed{\star}$ Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

(1) Montrez que si $f \in L^\infty(X)$, alors $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ presque partout sur X.

(2) En déduire que si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^\infty(X)$ alors

$$fg \in L^p(X) \text{ et } \|fg\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_\infty$$

et

$$L^\infty(X) \subset L^1(X) \iff \mu(X) < \infty$$

(3) Montrer que pour tout $f \in L^p(X) \cap L^\infty(X)$ et pour tout $1 \leqslant p \leqslant s \leqslant \infty$, on a :

$$\|f\|_s \leqslant \|f\|_p^{\frac{p}{s}} \|f\|_\infty^{\frac{1-p}{s}}$$

Exercice 10. $\boxed{\star}$ On considère $X = [0, 1]$, muni de la (restriction) de la mesure de Lebesgue. On considère la suite des intervalles

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

avec $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit

$$[0,1],[0,1/2],[1/2,1],[0,1/3],[1/3,2/3],[2/3,1],[0,1/4],\ldots$$

Soit f_n la fonction caractéristique du n^{ieme} intervalle.

(1) Montrer que si $n \geqslant \frac{m(m+1)}{2}$, alors f_n est la fonction caractéristique de l'intervalle dont la mesure est au plus 1/m.

(2) En déduire que (f_n) converge vers 0 dans $L^p([0,1])$.

(3) Montrer finalement que (f_n) ne converge vers 0 en aucun point de $[0,1]$.

On a ici l'exemple d'une suite qui converge dans L^p, mais qui ne converge pas presque partout.

On pourra remarquer cependant qu'il est possible de choisir une sous-suite de (f_n) qui converge vers 0 .

Exercice 11. $\boxed{\star}$ Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\in L^p(X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et β_n définie pour tout $E \in \mathcal{A}$ par

$$\beta_n(E) = \left(\int_E |f_n|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

Montrez que

$$|\beta_n(E) - \beta_m(E)| \leqslant \|f_n - f_m\|_p \,.$$

En déduire que si la suite (f_n) est de Cauchy dans $L^p(X)$ alors $\lim_{n\to\infty} \beta_n(E)$ existe pour tout $E \in \mathcal{A}$.

Exercice 12. $\boxed{\star}$ Soit u un élément de $L^2([0,1],\mathbb{R})$. On définit $T(u)$ sur $[0,1]$ par

$$T(u)(x) := \int_0^x u(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

(a) On note χ_x la fonction caractéristique de $[0,x]$. Montrer que $\chi_x \in L^2([0,1],\mathbb{R})$ et caiculer sa norme.

(b) Montrer que $|T(u)(x)| \leqslant \sqrt{x}||u\|_2$.

(c) En déduire que l'application

$$\begin{aligned} T : L^2([0,1],\mathbb{R}) &\to L^2([0,1],\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto Tu \end{aligned}$$

est continue. Donner une majoration de $\|T\|$.

Exercice 13. $\boxed{\star\star}$ Montrez que sil f est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors f est bornée et $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Exercice 14. $\boxed{\star\star}$ (1) Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, $f \in L^1(X)$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions positives de $L^1(X)$ convergeant presque partout vers f, et telle que $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.
Montrer que (f_n) converge vers f dans $L^1(X)$.

(2) Soit $f_n \in L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ définie par $f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n[} - n\mathbb{1}_{]-1/n,0[}$.
Montrer que

(i) $(f_n)_{n\geq 1}$ converge p.p. vers 0 et que

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = 0$.

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle vers 0 dans $L^1(\mathbb{R})$?

Exercice 15. $\boxed{\star\star}$ Soit $p \geq 1$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $L^p(X)$ qui converge presque partout vers $f \in L^p(X)$.

(1) Soit $g_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$. Montrer que pour tout $n \geq 0, g_n \geq 0$.

(2) Montrer que f_n converge vers f dans $L^p(\mu)$ si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$$

(Indication : appliquer le lemme de Fatou à la fonction g_n.)

Exercice 16. $\boxed{\star\star}$ Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to \infty$, si et seulement si il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $f_n \to f$ uniformément sur $X \setminus A$, quand $n \to \infty$.

Exercice 17. $\boxed{\star\star}$ (1) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n := n^{-1/p}\chi_{[0,n]}$ avec $p \in [1,+\infty[$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction identiquement nulle mais non dans $L^p(\mathbb{R})$.

(2) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n := n\chi_{[1/n,2/n]}$. Montrer que (f_n) converge ponctuellement vers la fonction identiquement nulle mais non dans $L^p(\mathbb{R})$, pour $p \in [1,\infty]$.

(3) Montrer que les suites des questions (1) et (2) convergent en mesure vers la fonction identiquement nulle.

(Une suite de fonctions mesurables $(g_n)_n$ sur (X,μ) converge en mesure vers g si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |(g_n(x) - g(x)| > \varepsilon\} = 0)$.

(4) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n := \chi_{[n,n+1]}$ converge ponctuellement mais non en mesure vers la fonction identiquement nulle.

Exercice 18. $\boxed{\star\star}$ Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Si f est une fonction mesurable, on note

$$r(f) := \int_X \frac{|f|}{1+|f|} d\mu$$

Montrer que

(1) $r(f) < \infty$.

(2) Si $f_n \to f$ dans $L^1(X)$ alors $r(f_n - f) \to 0$.

(3) Une suite (f_n) de fonctions mesurables converge vers f en mesure si et seulement si $r(f_n - f) \to 0$.

Exercice 19. $\boxed{\star\star}$ Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$.

Montre que si $f \in L^\infty(X)$ alors

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$$

Exercice 20. $\boxed{\star\star}$ Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré. On suppose qu'il existe $\mu_0 > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) \geqslant \mu_0$. Soient $p, q \in [1, +\infty]$. Si $p < q$ alors pour toute fonction mesurable f sur X on a

$$\|f\|_q \leqslant \mu_0^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_p$$

et en particulier

$$L^p(X) \subset L^q(X)$$

Exercice 21. $\boxed{\star\star\star}$ Soit f une fonction mesurable sur X à valeurs complexes, μ une mesure positive sur X et

$$\varphi(p) = \int_X |f|^p d\mu = \|f\|_p^p \quad (0 < p < \infty)$$

soit $E = \{p : \varphi(p) < \infty\}$. Supposons $\|f\|_\infty > 0$.

(a) Soient $r \in E, s \in E$. Montrer que $p \in E$, pour $r < p < s$.

(b) Montrer que $\log\varphi$ est convexe à l'intérieur de E et que φ est continue sur E.

(c) D'après (a), E est connexe. E est-il nécessairement ouvert ? fermé ? E peut-il être reduit à un point ? E peut-il être n'importe quel sous-ensemble connexe de $]0, \infty[$?

(d) Soient $r < p < s$, Montrer que $\|f\|_p \leqslant \max(\|f\|_r, \|f\|_s)$. En déduire que $L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subset L^p(\mu)$.

(e) En supposant $\|f\|_r < \infty$ pour un $r < \infty$, Montrer que $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ quand $p \to \infty$.

Exercice 22. $\boxed{\star\star\star}$ Soit f une fonction mesurable sur X à valeurs complexes et μ une mesure positive sur X telle que $\mu(X) = 1$.

(a) Montrer que $\|f\|_r \leqslant \|f\|_s$ pour $0 < r < s \leqslant \infty$.

(b) A quelles conditions peut-on avoir $0 < r < s \leqslant \infty$ et $\|f\|_r = \|f\|_s < \infty$?

(c) Montrer que $L^r(\mu) \supset L^s(\mu)$ pour $0 < r < s$. A quelles conditions ces deux espaces coïncident-ils ?

(d) En supposant $\|f\|_r < \infty$ pour un $r > 0$, montrer que

$$\lim_{p\to 0} \|f\|_p = \exp\left\{\int_X \log|f| d\mu\right\}$$

en posant $\exp(-\infty) = 0$.

Exercice 23. $\boxed{\star\star\star}$ Soit $1 < p < \infty, f \in L^p = L^p(]0, +\infty[)$, relativement à la mesure de Lebesgue, et

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \quad (0 < x < \infty)$$

(a) Montrer l'inégalité de Hardy

$$\|F\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p$$

qui assure que l'application $f \to F$ envoie L^p dans L^p.

(b) Montrer qu'on a l'égalité seulement si $f = 0$ p.p.

(c) Montrer qu'on ne peut pas remplacer $\frac{p}{p-1}$ par une constante plus petite.

(d) Pour $f > 0$ et $f \in L^1$, montrer que $F \notin L^1$.

Exercice 24. $\boxed{\star\star}$ Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$.

(1) Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur X qui converge presque partout vers une fonction f mesurable sur X.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \varepsilon$ et tel que f_n converge uniformément vers f sur $X \setminus A$ (Théorème d'Egoroff).

(b) Donner un contre exemple lorsque $\mu(X) = \infty$.

(2) Soit $p \in [1, \infty]$. Soit (f_n) une suite bornée de fonctions de $L^p(X)$ qui converge presque partout vers une fonction f mesurable sur X.

(a) On suppose $p < \infty$.

(i) Montrer que $f \in L^p(X)$.

(ii) Montrer que $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^r(X)$ pour tout $r \in [1, p[$.

(b) On suppose $p = \infty$.

(i) Montrer que $f \in L^\infty(X)$.

(ii) Montrer que $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^r(X)$ pour tout $r \in [1, \infty[$.

Exercice 25. $\boxed{\star\star}$ On considère l'espace $X = [a, b]$ $(a < b)$ muni de sa tribue borélienne et de sa mesure de Lebesgue λ.

Soit $f \in L^\infty(X)$.

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$ on a

$$\|f\|_p \leqslant (1 + \varepsilon)\|f\|_\infty$$

(2) Montrer qu'il existe $E \subset (a, b]$ avec $\lambda(E) > 0$ tel que

$$\|f\|_p \geqslant \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right) \lambda(E)^{1/p}$$

(3) Montrer qu'il existe $p_1 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $p \geqslant p_1$,

$$\left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right) \lambda(E)^{1/p} \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$$

(4) En déduire que $\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice 26. $\boxed{\star}$ On considère $X = [0, 1]$ muni de sa mesure de Lebesgue dt. Soit $p \in [1, \infty]$.

(1) Soit $\varphi : L^p([0, 1]) \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(f) = \int_{[0,1]} t f(t) dt$$

pour tout $f \in L^p([0, 1])$.

(1) Montrer que φ est une forme linéaire continue sur $L^p([0, 1])$ (on pourrait utiliser l'inégalité de Hölder).

(2) Montrer que $\|\varphi\|_{L^p([0,1])'} = \left(\frac{1}{q+1}\right)^{1/q}$, où q est le conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).