Exercice 1. Notons $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(1) Montrer que les applications

$$p : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad q : f \mapsto |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

sont des normes équivalentes sur $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{K})$.

(2) Les normes p et $f \mapsto \|f\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

(3) Montrer que $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{K})$ muni de la norme p ou de la norme q est un espace de Banach. Est il complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?

(4) Calculer la norme de la forme linéaire $\ell : f \mapsto f'(0)$ pour les normes p et q. Est-ce que ℓ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 2. (1) On pose $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $a\in[0,1]$ et $u : E\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall f\in E,\ u(f)=f(a).$$

Étudier la continuité de u pour les normes $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

(2) On pose $F=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall f\in F,\ \|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

On considère $v : F\to E$ définie par

$$\forall f\in F,\ v(f)=f'.$$

Étudier la continuité de v pour $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ lorsque E est muni de $\|\cdot\|_\infty$.

(3) Calculer $\|u\|_{\text{op}}$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

(4) Soit $u : E\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall f\in E,\ u(f)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Montrer que u est bien définie, linéaire et continue pour $\|\cdot\|_\infty$. Calculer $\|u\|_{\text{op}}$ pour $\|\cdot\|_\infty$ et monter que $\|u\|_{\text{op}}$ n'est pas atteinte.

Exercice 3. Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. Soit u un morphisme additif de E dans F borné sur la boule unité fermée $B_f(0,1)$. Montrer que u est une application linéaire continue.

Exercice 4. Soient E et F deux espaces vectoriels normé et soit $u : E\to F$ une application linéaire. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes

(1) u est continue

(2) $\{x\in E, \|u(x)\|_F = 1\}$ est fermé dans E.

Exercice 5. Soit F un fermé non vide de l'espace vectoriel normé de dimension finie $(E,\|\cdot\|)$ et soit $a\in E$. Montrer qu'il existe $b\in F$ tel que $\|a-b\|=d(a,F)$.

Exercice 6. Soit F un sous espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé $(G,\|\cdot\|)$ de dimension quelconque. Soit $a\in G$. Montrer qu'il existe $b\in F$ tel que $\|a-b\|=d(a,F)$.

Exercice 7. [Théorème de Riesz] Soit $(\ F,\|\cdot\|\ )$ un espace vectoriel normé de dimension infinie.

(1) Soit G un sous-espace vectoriel de F de dimension finie. Montrer qu'il existe $a\in S(0,1)$ tel que $d(a,G)\geq 1$.

(2) Construire une suite $(a_n)\in S(0,1)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\neq m, \|a_n-a_m\|\geq 1$.

(3) Déduire la démonstration du théorème de Riesz : si H un espace vectoriel normé, alors H est de dimension finie ssi la boule unité fermée de H est compacte.

Exercice 8. Soit E l'espace des fonctions réelles définies sur $I=[0,1]$ et lipschitziennes, c'est-àdire telles que

$$\sup_{\substack{(x,y)\in I\times I\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = K(f) < +\infty$$

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

(2) Pour chaque $f\in E$ on pose

$$M(f)=\sup_{x\in I}|f(x)| \quad \text{et} \quad N(f)=M(f)+K(f)$$

Montrer que N est une norme sur E.

(3) Montrer que les normes M et N ne sont pas équivalentes. (Pour cela on cherchera à construire une suite de fonctions f_n telle que $K(f_n)$ soit fixe tandis que $\lim_{n\to\infty} M(f_n) = 0$).

(4) Montrer directement que la boule unité fermée centrée à l'origine n'est pas compacte pour la topologie associée à N (on pourra utiliser la suite de fonctions f_n fabriquée au (3)).

(5) Montrer que (E,N) est complet.

Exercice 9. (1) Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension 1 et de base $\{e\}$. Construire un isomorphisme d'espaces vectoriels $f : E\to\mathbb{K}$ tel que f et f^{-1} soient uniformément continues. En déduire que E est un espace de Banach.

(2) On suppose que pour tout espace vectoriel normé E de dimension $n-1$, il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $f : E\to\mathbb{K}^{n-1}$ tel que f et f^{-1} soient uniformément continues.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et de base $\{e_1,\dots,e_n\}$.

(a) Pour tout $i = 1, \dots, n$ soit $g_i : E \to \mathbb{K}$ définie par $g\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\right) = \lambda_i$. Montrer que $H_i := g_i^{-1}(0)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

(b) En déduire que H_i est fermé.

(c) Soit $a \notin H_i$. Construire $b \notin H_i$ tel que $g_i(b) = 1$.

(d) Montrer que $b + H_i = \{b + h, h \in H_i\}$ est fermé et qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \cap H_i = \varnothing$.

(e) Si $x \in B(0,r)$ montrer que $g_i(x) \neq 1$, puis, par l'absurde, que $|g_i(x)| < 1$.

(f) En conclure que g_i est uniformément continue.

(g) Montrer que $g : E \to \mathbb{K}^n$ définie par $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et est uniformément continue.

(h) Démontrer que $g^{-1} : \mathbb{K}^n \to E$ est uniformément continue.

(3) Énoncer le résultat obtenu. En déduire en particulier que si E est normé de dimension finie, E est un espace de Banach, localement compact, et que $B_f(0,1)$ est compacte.

(4) Montrer que dans un espace vectoriel normé de dimension finie les parties compactes sont les parties fermées bornées.

(5) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soient p, q deux normes sur E.

(a) Montrer que l'application identité $1_E : (E,p) \to (E,q)$ est uniformément continue, et en déduire que $\exists C > 0$ tel que $\forall x \in E$, $q(x) \leqslant Cp(x)$. Conclure que p et q sont équivalentes.

(b) Énoncer le résultat ainsi démontré.

(c) Montrer que sur $\mathbb{K}^n$ les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes et que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

(6) Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n et soit F un espace vectoriel normé sur le même corps.

(a) Montrer que si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$ et f est uniformément continue.

(b) Montrer que si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et f est injective, alors f est une application fermée.

(7) Soit E un espace normé localement compact.

(a) Montrer que : $\exists n \in \mathbb{N}, \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in$ E tels que

$$\mathscr{B}_f(0,1) \subseteq \bigcup_1^n \mathscr{B}\left(a_i, \frac{1}{2}\right)$$

(b) Soit $V = \mathrm{Vect}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est le sous-espace vectoriel engendré par $a_1, a_2, \dots, a_n$. Montrer que V est de dimension finie et que V est fermé dans E.

(c) Soit $x \in E$. Si $x \notin V$ montrer que $\alpha = d(x,V) > 0$. En revenant alors à la définition de $d(x,V)$ montrer qu'il existe $y \in V$ tel que $\alpha \leqslant \|x-y\| \leqslant \frac{3\alpha}{2}$.

En posant $z = \frac{x-y}{\|x-y\|}$, montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\|z - a_{i_0}\| < \frac{1}{2}$. Vérifier que $y + \|x-y\| a_{i_0} \in V$ et en déduire que $\|x-y\| > 2\alpha$.

Conclusion ?

Exercice 10. Sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et soient les deux normes $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ et $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

(1) Montrer que $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$, et que toute suite de Cauchy (resp convergente) pour $\|\cdot\|_\infty$ est de Cauchy (resp convergente) pour $\|\cdot\|_1$.

(2) Pour $n \geqslant 0$ soit $f_n : t \to t^n$, $f_n \in$ E. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_\infty$ et en conclure qu'il n'existe pas de nombre $b \geqslant 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant b\|f\|_1$ pour tout $f \in E$.

(3) Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

(4) Pour $n \geqslant 1$ soit $f_n(t) = \min\left\{n, \frac{1}{\sqrt{t}}\right\}$. Montrer que $\|f_{n+p} - f_n\|_1 \leqslant \frac{1}{n}$ et que $(f_n)_n \geqslant 1$ est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$. Si elle convergeait vers une fonction $f \in E$ on aurait $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \forall t \in]0,1]$. Conclure à une absurdité.

(5) Montrer que $(f_n)_n \geqslant 1$ n'est pas une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$.

Ici

Exercice 11. (1) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que :

(a) $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .

(b) Si F est fermé, alors l'espace vectoriel quotient E/F est séparé (E/F muni de la topologie quotient, l'équivalence étant $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x - y \in F$).

(c) Si E/F est séparé, alors F est fermé.

(2) Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, et $p : E \to E/F$ la surjection canonique. Montrer que :

(a) E/F est normé par $\|p(x)\| = \inf\{\|y\|, y - x \in F\}$.

(b) p est uniformément continue et ouverte.

(c) La topologie associée à la norme $\|p(x)\|$ est la topologie quotient de E/F.

(3) Soit $E = \mathcal{I}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions Riemann-intégrables sur $[0,1]$. Pour $f \in E$ soit $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$.

(a) Montrer que $\|\cdot\|_1$ n'est pas une norme sur E.

(b) Pour $f \in E$ soit $B(f,r) = \{g \in E \ : \ \|g - f\|_1 < r\}$. Montrer que l'on peut définir ainsi une topologie (non séparée) sur E .

(c) Soit $F = B_f(0,0) = \{g \in \mathrm{E} \ : \ \|g\|_1 = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de E.

(d) Soit $p : E \to E/F$ est la surjection canonique. Montrer que

$$\|p(f)\| = \inf\{\|g\|_1 \ , \ g - f \in F\}$$

est une norme sur E/F.

Exercice 12. Pour une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, on définit $\|u\|_p \in [0, +\infty]$ par

$$\|u\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p\right)^{1/p} & \text{si } p < +\infty \\ \sup\{|u_n| \, ; n \in \mathbb{N}\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $\ell^p(\mathbb{N};\mathbb{R})$ (ou simplement $\ell^p(\mathbb{N})$) le sous-ensemble de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ formé des suites u telles que $\|u\|_p < +\infty$.

(1) Montrer que pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\ell^p(\mathbb{N})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(2) (a) Montrer que pour tout $1 \leq p < \infty$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\ell^p(\mathbb{N})$.

(b) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

(3) Soient $u \in \ell^p(\mathbb{N})$ et $v \in \ell^q(\mathbb{N})$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$ et $q>1$. Montrer l'inégalité de Hölder

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p\|v\|_q.$$

(4) Soient :

ℓ_0 l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ convergentes ;

ℓ_{00} l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ qui convergent vers 0 ;

ℓ_c l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ nulles à partir d'un certain rang.

Montrer que ℓ_0, ℓ_{00} et ℓ_c sont des sous-espaces de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et étudier leurs propriétés topologiques pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, et l'application qui à une suite on associe sa limite.

(5) Montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ sont complets

(6) Soient $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$. Montrer que $\ell^{p_1}(\mathbb{N}) \subset \ell^{p_2}(\mathbb{N})$.

(7) Montrer que

(a) pour $p \in [1,+\infty[$, l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ est séparable ;

(b) l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable

(8) Soit $1 \leq p \leq \infty$, et q l'exposant conjugué.

(a) Soit. $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N})$. Montrer que l'application

$$\varphi_v : u \to \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

est une forme linéaire continue sur $\ell^p(\mathbb{N})$ (donc un élément de dual topologique $(\ell^p(\mathbb{N}))'$)

(b) Montrer que $\|\varphi_v\|_{(\ell^p(\mathbb{N}))'} = \|v\|_q$

(9) Soit $1 \leq p < \infty$. Soit q l'exposant conjugué. Montrer que le dual topologique de $\ell^p(\mathbb{N})$ s'identifie à $\ell^q(\mathbb{N})$: $(\ell^p(\mathbb{N}))' \approx \ell^q(\mathbb{N})$.

Exercice 13. Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(1) Montrer que $\mathscr{L}_c(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$.

(2) Soit $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$. Montrer qu'il existe $r>0$ tel que pour tout $x \in E$ on ait : $\|f(x)\|_F \leqslant r\|x\|_E$. En déduire que f est uniformément continue.

(3) Réciproquement, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ vérifie : $\|f(x)\|_F \leqslant r\|x\|_E$, montrer que f est continue. En déduire, pour $f \in \mathscr{L}(E,F)$ l'équivalence des propriétés :

(a) f est continue ;

(b) $\forall A \subseteq E$, A borné $\Rightarrow f(A)$ borné ;

(c) $\exists c>0 : \|x\|_E \leqslant 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leqslant c$;

(d) $\exists c>0 : \|x\|_E = 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leqslant c$;

(4) Soit $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$. Montrer que les quatre nombres :

$$a_1 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$
$$a_2 = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F,$$
$$a_3 = \sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \|f(x)\|_F,$$
$$a_4 = \inf\{c, c>0 \text{ et } \|f(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E,\ \forall x \in E\}$$

sont égaux (on montrera que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_1$).

(5) Pour $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$ on pose

$$\|f\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|_F\leq 1} \|f(x)\|_F.$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$, pour laquelle on a, pour tout $x \in E$: $\|f(x)\|_F \leqslant \|f\|\|x\|_E$.

(6) Montrer que si F est un espace de Banach, $\mathscr{L}_c(E,F\ )$ aussi (pour la norme de définie en (5)).

(7) (a) Montrer que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est isométrique à $\mathscr{L}_c\left(\ell^1(\mathbb{N}),\mathbb{C}\right)$. On démontrera d'abord que $(z_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ s'écrit $(z_n) = \sum_{n\geqslant 0} z_n e_n$ où $e_n = (0,\dots,0,1,0\dots)$ (seule la n^{ieme} composante vaut 1).

(b) En déduire que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est un espace de Banach.

(8) Soit E l'ensemble des suites complexes $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} n!\,|x_n|$ soit convergente. On pose $\|(x_n)\| = \sum_{n\geqslant 0} n!\,|x_n|$.

(a) Montrer que $(E,\|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

(b) Soit $f : \ell^1(\mathbb{N}) \to E$ définie par $f((x_n)) = \left(\frac{x_n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$. Montrer que $f \in \mathscr{L}_c\left(\ell^1(\mathbb{N}),E\right)$ et calculer sa norme. En déduire que E est un espace de Banach.

Exercice 14. (1) Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Soient $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R}^n \to E$ une application linéaire.

Montrer que

$$\|f\|_{\text{op}} = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|f(e_j)\|$$

où $(e_1,\dots e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

En déduire que si un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a pour matrice $A=((a_{i,j})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique, sa norme d'opérateur est donnée par :

$$\|f\|_{\text{op}} = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right\}$$

(2) Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soient $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire continue.

Montrer que
$$\|f\|_{\mathrm{op}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|f_i\|$$
où, pour $x \in E$,on a écrit $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$.

En déduire que si un endomorphisme $f \in \mathscr{L}_c(\mathbb{R}^n)$ a pour matrice $A = ((a_{i,j})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique, sa norme d'opérateur est donnée par :

$$\|f\|_{\mathrm{op}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

(3) (a) Soit f un endomorphismle d'un espace euclidien E. Montrer que

$$\|f\|_{\mathrm{op}} = \max \left\{ \sqrt{\lambda}; \lambda \text{ valeur propre de } f^* \circ f \right\}$$

(b) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$. Montrer que si un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ a pour matrice $A = ((a_{i,j})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique, sa norme d'opérateur est donnée par :
$$\|f\|_{\mathrm{op}} = \max \left\{ \sqrt{\lambda}; \lambda \text{ valeur propre de } {}^t\!AA \right\}$$