CHAPITRE 4
THÉORIE SPECTRALE
DANS LES ESPACES DE HILBERT

Table des matières

Si E et F sont deux espaces vectoriels normés $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on notera $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires **continues** de E dans F. Comme dans ce contexte, "être continue" $\equiv$ "être borné" on parlera parfois d'opérateur linéaire *bornés* au lieu d'opérateur linéaire *continue*.

1. Complement sur les opérateurs linéaire bornés inversibles

Rappelons que si E un espace de Banach et si $T \in \mathscr{L}(E)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) T est inversible :

(2) T est bijectif et T^{-1} est continu ;

(3) $\mathbf{Ker}\, T = \{0\}, \mathbf{Im}\, T = E$ et T^{-1} est continu.

En fait, l'application réciproque d'un opérateur linéaire bijectif et continue de E dans E est toujours continue. Ceci est une conséquence directe du théorème de l'application ouverte.

Proposition 1.1. *E un espace de Banach. L'ensemble $GL(E)$ des éléments inversibles de $\mathscr{L}(E)$ est un ouvert $\mathscr{L}(E)$ qui contient Id. De plus, l'application $T \mapsto T^{-1}$, de $GL(E)$ dans $GL(E)$ est continue.*

Plus précisément, si $T_0 \in GL(E)$ et si $\|T - T_0\| < \left\|T_0^{-1}\right\|^{-1}$ alors $T \in GL(E)$ et

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(I - T_0^{-1}T\right)^n T_0^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_0^{-1} \left(I - TT_0^{-1}\right)^n$$

Démonstration. Soit $T_0 \in GL(E)$.

(1) Tout d'abord,

$$\left\|I - T_0^{-1}T\right\| = \left\|T_0^{-1}(T_0 - T)\right\| \leq \left\|T_0^{-1}\right\| \|T - T_0\|$$

et

$$\left\|I - TT_0^{-1}\right\| = \left\|(T_0 - T)\, T_0^{-1}\right\| \leq \|T - T_0\| \left\|T_0^{-1}\right\|.$$

Donc, si $\|T - T_0\| < \left\|T_0^{-1}\right\|^{-1}$, les séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(I - T_0^{-1}T\right)^n T_0^{-1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} T_0^{-1} \left(I - TT_0^{-1}\right)^n$$

Date: 10 décembre 2024 • Khalid Koufany.

sont normalement convergentes et donc convergentes. D'autre part, on voit aisément par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(I - T_0^{-1}T\right)^n T_0^{-1} = T_0^{-1}\left(I - TT_0^{-1}\right)^n$$

En effet, la propriété est clairement vraie pour $n = 0$ et, si on la suppose vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}\left(I - T_0^{-1}T\right)^{n+1} T_0^{-1} &= \left(I - T_0^{-1}T\right)^n \left(T_0^{-1} - T_0^{-1}TT_0^{-1}\right) \\ &= \left(I - T_0^{-1}T\right)^n T_0^{-1}\left(I - TT_0^{-1}\right) \\ &= T_0^{-1}\left(I - TT_0^{-1}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, les deux séries sont égales. Notons S leur somme commune.

(2) Vérifions que S est bien l'inverse de T.

$$\begin{aligned}ST &= ST_0[\left(T_0^{-1}T - I\right) + I] \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(I - T_0^{-1}T\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(I - T_0^{-1}T\right)^n \\ &= I\end{aligned}$$

Le calcul est justifié par le fait que le produit est une application bilinéaire continue de $\mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$ et par la convergence des séries. De même,

$$\begin{aligned}TS &= [\left(TT_0^{-1} - I\right) + I]T_0S \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(I - TT_0^{-1}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(I - TT_0^{-1}\right)^n \\ &= I\end{aligned}$$

Ainsi, si $\|T - T_0\| < \left\|T_0^{-1}\right\|^{-1}$, alors T est inversible et T^{-1} est bien égal à la somme des séries données dans l'énoncé.

(3) En particulier, si $\|T - T_0\| < \left\|T_0^{-1}\right\|^{-1}$,

$$\begin{aligned}\left\|T^{-1} - T_0^{-1}\right\| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left\|I - T_0^{-1}T\right\|^n \left\|T_0^{-1}\right\| \\ &= \frac{\left\|T_0^{-1}\right\| \left\|I - T_0^{-1}T\right\|}{1 - \left\|I - T_0^{-1}T\right\|} \\ &\leq \frac{\left\|T_0^{-1}\right\|^2 \|T - T_0\|}{1 - \|T - T_0\| \left\|T_0^{-1}\right\|}\end{aligned}$$

ce qui montre la continuité en T_0 de l'application $T \mapsto T^{-1}$. □

2. Opérateurs compacts

Définition 2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application $T \in \mathscr{L}(E, F)$ est* **un opérateur compact** *si $\overline{T\left(\bar{B}_E\right)}$ est un compact de F, où $\bar{B}_E$ est la boule unité fermée de E.*

On note par $\mathscr{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F et par $\mathscr{K}(E)$ si $E=F$.

Exemple 2.2. Soit $H=L^2(I,\mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$, où I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Considérons l'opérateur intégral $T : H \to H$ défini par

$$(Tf)(t)=\int_I K(t,s)f(s)ds$$

où le noyau noyau $K \in \mathscr{C}(I\times I,\mathbb{C})$. D 'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on

$$\left|\int_I K(t,s)f(s)ds\right| \le \|K(t,\cdot)\|_2\|f\|_2$$

et

$$\begin{aligned}\|Tf\|_2^2 &= \int_I |(Tf)(s)|^2 ds\\ &= \int_I \left|\int_I K(t,s)f(y)ds\right|^2 dt\\ &\le \|f\|_2^2\int_I \|K(t,\cdot)\|_2^2 dt = \|f\|_2^2\|K\|_2^2\end{aligned}$$

Ceci montre que lorsque $f\in L^2(I)$, la fonction Tf est bien définie presque partout et qu'elle est de carré intégrable. T est clairement une opérateur linéaire, et le calcul ci-dessus montre qu'il est borné (continu) et que $\|T\|\le\|K\|_2$.

Pour montrer que T est un opérateur compact, nous devons montrer que $A:=T\left(\bar{B}_H\right)$ est un sous-ensemble relativement compact dans H.

(1) Bornitude uniforme : Soit $f\in\bar{B}_H$, alors pour tout $t\in I$,

$$|Tf(t)|=\left|\int_I K(t,s)f(s)ds\right|\le\|f\|_2\sup_{t\in I}\|K(t,\cdot)\|_2\le\sup_{t\in I}\|K(t,\cdot)\|_2=C.$$

(2) Équicontinuité : Comme K est continue sur le compact $I\times I$, elle est équicontinue, d'où pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que

$$|t_1-t_2|+|s_1-s_2|\le\delta \quad \text{entraîne} \quad |K(t_1,s_1)-K(t_2,s_2)|\le\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $f\in\bar{B}_H$, par l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned}|(Tf)(t_1)-(Tf)(t_2)| &\le \int_I |K(t_1,s)-K(t_2,s)|\,|f(s)|ds\\ &\le \varepsilon\int_I |f(s)|ds\le\varepsilon\|f\|_2\le\varepsilon\end{aligned}$$

car $\|f\|_2\le 1$. Cela montre que l'ensemble A est équicontinu. D'après le théorème d'Ascoli[1] , $A=T\left(\bar{B}_H\right)$ est relativement compact dans H et par conséquent T est compact.

---

1. Une suite de fonctions $\{f_n\}\subseteq\mathscr{C}(K)$ admet une sous-suite convergeant uniformément si les conditions suivantes sont remplies :
1. Équicontinuité : Pour tout $\epsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $x,y\in K$, si $|x-y|<\delta$, alors $|f_n(x)-f_n(y)|<\epsilon$ pour tout n.
2. Bornitude uniforme : Il existe une constante $M>0$ telle que $|f_n(x)|\le M$ pour tout $x\in K$ et tout n.

Proposition 2.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) T est compact.

(ii) Pour tout $A \subset E$ borné, $\overline{T(A)}$ est compact.

(iii) Pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E, (Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.

Démonstration. 1. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $A \subset E$ borné, alors il existe $r > 0$ tel que $A \subset r\bar{B}_E$, d'où $\overline{T(A)} \subset r\overline{T\left(\bar{B}_E\right)}$. Ainsi, $\overline{T(A)}$ est compact, comme fermé du compact $r\overline{T\left(\bar{B}_E\right)}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Il suffit de poser $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{T\left(\bar{B}_E\right)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in T\left(\bar{B}_E\right)$ tel que $\|y_n - z_n\|_F \leq 2^{-n}$. Comme par hypothèse $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence [2], il en est de même pour $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\square$

Proposition 2.4. *Soit E et F deux espaces de Banach.*

(i) L'ensemble des opérateurs compacts $\mathscr{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}(E,F)$.

(ii) Soient $S \in \mathscr{L}(E,F)$ et $T \in \mathscr{L}(F,G)$, alors si S ou T est compact, $T \circ S \in \mathscr{K}(E,G)$. En particulier, $\mathscr{K}(E)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$.

Démonstration. (i) Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ et $S,T \in \mathscr{K}(E,F)$. Soit (x_n) une suite bornée de E. Comme S et T sont compacts, il existe une sous-suite $\left(x_{\phi(n)}\right)$ telle que $S\left(x_{\phi(n)}\right)$ et $T\left(x_{\phi(n)}\right)$ convergent, ainsi $\lambda S\left(x_{\phi(n)}\right) + \beta T\left(x_{\phi(n)}\right)$ converge. Donc, la suite image de toute suite bornée par $\lambda S + \beta T$ admet une valeur d'adhérence i.e. $\lambda S + \beta T \in \mathscr{K}(E,F)$.

Soit $T \in \overline{\mathscr{K}(E,F)}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon \in \mathscr{K}(E,F)$ tel que $\|T - T_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, cela signifie que $\|Tx - T_\varepsilon x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in \bar{B}_E$. Comme T_ε est compact, $T_\varepsilon\left(\bar{B}_E\right)$ est précompact [3] , il exise donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $\{y_1, \dots, y_{N_\varepsilon}\}$ tels que

$$T_\varepsilon\left(\bar{B}_E\right) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Ainsi, pour tout $x \in \bar{B}_E$, il existe $i_0 \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$ tel que $\|T_\varepsilon x - y_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et par suite

$$\|Tx - y_{i_0}\| \leq \|Tx - T_\varepsilon x\| + \|T_\varepsilon x - y_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

D'où $T\left(\bar{B}_X\right) \subset \bigcup^{N_\varepsilon} B\left(y_i, \varepsilon\right)$, donc $\overline{T\left(\bar{B}_E\right)}$ est compact car F est complet. On a donc montrer que $T \in \mathscr{K}(E,F)$. Ainsi $\overline{\mathscr{K}(E,F)} = \mathscr{K}(E,F)$.

(ii) Supposons $S \in \mathscr{K}(E,F)$. Comme $T\left(S\left(\bar{B}_E\right)\right) \subset T\left(\overline{S\left(\bar{B}_E\right)}\right)$, ce dernier est compact, comme image du compact $\overline{S\left(\bar{B}_E\right)}$ par l'application continue T. Ainsi $\overline{T \circ S\left(\bar{B}_E\right)}$ est compact i.e. $T \circ S \in \mathscr{K}(E,F)$. $\square$

Corollaire 2.5. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors, l'opérateur identité de E n'est pas compact. Plus généralement, tout isomorphisme $T : E \to E$ n'est pas compact.*

2. z est une valeur d'adhérence de (z_n) s'il existe une sous-suite de (z_n) qui converge vers z

3. Un espace métrique X est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon ε. Un espace métrique X est compact ssi il est précompact et complet.

Démonstration. Pour l'opérateur identité I sur E, on a $\overline{I\left(\bar{B}_E\right)} = \bar{B}_E$, qui ne peut être compacte car la dimension de E est infinie. Quant à l'assertion générale, si un isomorphisme $T : E \to E$ est compact alors l'opérateur identité $I = T^{-1} \circ T$ serait compact, d'après la proposition précédente, ce qui serait une contradiction. □

Définition 2.6. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est dite* **de rang fini** *si la dimension de l'image de T est finie i.e.* $\dim \mathbf{Im}\, T = \dim T(E) < +\infty$*. On note $\mathscr{R}(E,F)$ l'espace des opérateurs de rang fini.*

$\mathscr{K}(E,F)$ étant fermé, il s'ensuit que tout opérateur qui peut être approché par des opérateurs de rang fini est également compact ; c'est un critère très utile pour montrer qu'un opérateur est compact.

Corollaire 2.7. *Soit E et F deux espaces de Banach et soit $T \in \mathscr{L}(E,F)$. S'il existe $T_n \in \mathscr{R}(E,F)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|T_n - T\| = 0$, alors lors T est compact.*

Proposition 2.8. *Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$ avec F un Hilbert. Si T est compact, alors T est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$ avec F un Hilbert et $\varepsilon > 0$. Comme $K := \overline{T\left(B_E\right)}$ est compact, il existe un ensemble fini I et une famille $(y_i)_{i\in I}$ de F tels que

$$K \subset \bigcup_{i\in I} B\left(y_i, \varepsilon\right)$$

Soit X l'espace vectoriel engendré par $\{y_i, i \in I\}$ et soit p_X la projection orthogonale sur X. Alors p_X est un operateur continu de rang fini. On sait que pour tout $x \in B_E$ il existe $i \in I$ tel que

$$\|Tx - y_i\| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\|Tx - p_X Tx\| = d(Tx, X) = \inf_{y\in X} \|Tx - y\| \leq \varepsilon$$

d'où

$$\|T - p_X T\| \leq \varepsilon.$$

□

Exemple 2.9. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une matrice infinie telle que

$$C = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|^2 < +\infty$$

Alors, A définit un oprérateur compact $T : \ell^2 \to \ell^2$ par

$$T\left((x_n)\right) = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{0j} x_j, \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{1j} x_j, \ldots\right) = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} x_j\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

En effet, T est bien défini,

$$\|T(x_n)\|_2^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij}x_j\right|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|\cdot|x_j|\right)^2$$

et par Cauchy-Schwarz on a

$$\|T(x_n)\|_2^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|^2\right)\cdot\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2\right) = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|^2\right)\cdot\|(x_n)\|_2^2$$

D'où $T \in \mathscr{L}(\ell^2)$ et $\|T\| \leq \sqrt{C}$.

Soit $T_k : \ell^2 \to \ell^2$, défini par $T_k((x_n)) = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}^*} a_{ij}x_j\right)_{0\leq i\leq k}$, c'est un opérateur de rang fini, en effet, $T_k = p_k \circ T$ où p_k est la projection orthogonale sur $F_k = \operatorname{Vect}(e_i)_{0\leq i\leq k}$ où les e_n sont les élements de la base hilbertienne standard de ℓ^2. On voit facilement que $\|T - T_k\|^2 \leq \sum_{i=k+1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}|a_{ij}|^2\right)$ donc tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$, comme le reste d'une série convergente. D'où T est limite d'opérateurs de rang fini, il est donc compact.

Définition 2.10. *Soit H un espace de Hilbert séparable. Un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$ est un* **opérateur de Hilbert-Schmidt** *s'il existe une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{k=0}^{\infty}\|Te_k\|^2 < \infty$.*

Le réel $\|T\|_{\mathrm{HS}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\|Te_k\|^2\right)^{1/2}$ est appelé la **norme de Hilbert-Schmidt** *de T.*

Exemple 2.11. Pour une application linéaire en dimension finie $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, (de façon équivalente, pour les matrices $n \times n$), la norme de Hilbert-Schmidt est $\|T\|_{HS} = \sqrt{\mathbf{tr}(T^*T)}$.

Proposition 2.12. *La définition d'opérateur et de norme de Hilbert-Schmidt ne dépendent pas du choix de la base hilbertienne de H.*

Démonstration. Supposons que $\sum_k \|Te_k\|^2 < \infty$ pour une base hilbertienne (e_k) de H. En utilisant l'identité de Parseval deux fois, on obtient

$$\sum_k \|Te_k\|^2 = \sum_k\sum_j |\langle Te_k, e_j\rangle|^2 = \sum_j\sum_k |\langle e_k, T^*e_j\rangle|^2 = \sum_j \|T^*e_j\|^2$$

Soit (e'_k) une autre base hilbertienne de H. Le même argument donne

$$\sum_j \|T^*e_j\|^2 = \sum_j\sum_k |\langle e'_k, T^*e_j\rangle|^2 = \sum_k\sum_j |\langle Te'_k, e_j\rangle|^2 = \sum_k \|Te'_k\|^2$$

D'où $\sum_k \|Te_k\|^2 = \sum_k \|Te'_k\|^2$. □

Remarque 2.13. (1) Une conséquence de la démonstration ci-dessus, est que $\|T^*\|_{\mathrm{HS}} = \|T\|_{\mathrm{HS}}$.

(2) D'autre part on a toujours $\|T\| \leq \|T\|_{\mathrm{HS}}$.

En effet, soit x un vecteur de norme 1 et $B = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H telle que $x \in B$. Alors $\|Tx\| \leq \sum_k \|Tx_k\|^2 = \|T\|_{\mathrm{HS}}$. En appliquant cette inégalité à tous les x tel que $\|x\| = 1$, on obtient le résultat.

Proposition 2.14. *Tout opérateur T de Hilbert-Schmidt est compact.*

Démonstration. Soit une base hilbertienne (e_k) de H. On pose $c = \sum_k \|Te_k\|^2$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k>N_\varepsilon} \|Te_k\|^2 \leq \varepsilon^2$. Soit $F_\varepsilon = \mathrm{Vect}\{e_0, \dots, e_{N_\varepsilon}\}$ et $p_\varepsilon : H \to H$ la projection orthogonale sur F_ε. Alors $T_\varepsilon = p_\varepsilon \circ T$ est de rang fini et $\|T - T_\varepsilon\|^2 \leq \|T - T_\varepsilon\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{k>N_\varepsilon} \|Te_k\|^2 \leq \varepsilon^2$. Ainsi T est limite d'opérateurs de rang fini, il est donc compact.

$\square$

Exemple 2.15. Considérons l'opérateur intégral $T : L^2([0,1], \mathbb{R}) \to L^2([0,1], \mathbb{R})$ défini par

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s) ds$$

avec un noyau $K \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Alors T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, et $\|T\|_{\mathrm{HS}} = \|K\|_2$.

En effet, on peut voir T, comme le produit scalaire de f avec le noyau K : si on note, $K_t(s) = K(t,s)$, alors $(Tf)(t) = \langle K_t, f\rangle$, pour tout $t \in [0,1]$.

Fixons une base hilbertienne (e_k) de $L^2([0,1], \mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_k \|Te_k\|_2^2 &= \sum_k \int_0^1 |(Te_k)(t)|^2 \, dt = \sum_k \int_0^1 |\langle K_t, e_k\rangle|^2 \, dt \\
&= \int_0^1 \sum_k |\langle K_t, e_k\rangle|^2 \, dt \quad \text{(par le théorème de convergence monotone)} \\
&= \int_0^1 \|K_t\|_2^2 \, dt \quad \text{(par l'identité de Parseval)} \\
&= \|K\|_2^2 \quad \text{(par définition de } K_t \text{ et le théorème de Fubini).}
\end{aligned}$$

Nous terminons cette section par quelques propriétés des opérateurs compacts.

Proposition 2.16. *Soit E un espace vectoriel normé. Soit $T \in \mathscr{L}(E)$ un opérateur compact.*

(1) *Le sous-espace* $\mathbf{Ker}(I - T)$ *est de dimension finie.*
(2) *Le sous-espace* $\mathbf{Im}(I - T)$ *est fermé.*
(3) *L'opérateur $I - T$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$ si et seulement si il est injectif.*

Démonstration. (1) Notons $F = \mathbf{Ker}(I - T)$. Alors F est un sous-espace fermé de E et $\bar{B}(F) = T(\bar{B}(F)) \subset \overline{T(\bar{B}(E))} \cap F$ qui est donc compact. Par le théorème de Riesz, F est de dimension finie.

(2) Soit $y \in \overline{\mathrm{Im}(I - T)}$ et soit (x_n) une suite de E telle que

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n - Tx_n) = y$$

Premier cas : la suite (x_n) est bornée.
Puisque T est compact, on peut alors, quitte à extraire une sous-suite, supposer que la suite (Tx_n) converge vers un point $z \in E$. Alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = y + z$ et, par continuité de T,on a $z = T(y+z)$, ce qui entraine que $y = (y+z) - T(y+z) \in \mathbf{Im}(I - T)$.

Deuxième cas : la suite (x_n) n'est pas bornée.
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}, d_n = d\left(x_n, \mathbf{Ker}(I-T)\right)$. Comme $\mathbf{Ker}(I-T)$ est de dimension finie d'après (1), il existe un point $z_n \in \mathbf{Ker}(I-T)$ tel que $\|x_n - z_n\| = d_n$ (en effet, la fonction continue $x \mapsto d\left(x_n, x\right)$ atteint certainement son minimum sur le compact non vide $\bar{B}\left(x_n, \|x_n\|\right) \cap \mathbf{Ker}(I-T)\big)$.

Si la suite (d_n) est bornée, on peut remplacer x_n par $x_n - z_n$ et on est ramené au premier cas et donc $y \in \mathbf{Im}(I-T)$.

Sinon, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. La suite $\left(\left(x_n - z_n\right)/d_n\right)$ étant bornée, on peut supposer, en extrayant au besoin une nouvelle sous-suite, que $T\left(\left(x_n - z_n\right)/d_n\right)$ converge vers un point $u \in E$ (puisque T est compact).

$$\begin{aligned} d_n^{-1}\left(x_n - z_n\right) &= d_n^{-1}\left(x_n - Tx_n\right) + d_n^{-1}\left(Tx_n - z_n\right) \\ &= d_n^{-1}\left(x_n - Tx_n\right) + d_n^{-1}\left(Tx_n - Tz_n\right) \\ &= d_n^{-1}\left(x_n - Tx_n\right) + d_n^{-1}T(x_n - z_n) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} d_n^{-1}\left(x_n - z_n\right) = \lim_{n\to+\infty} d_n^{-1}y + u = u$$

ce qui entraîne, d'une part que $Tu = u$ (par continuité de T), soit $u \in \mathbf{Ker}(I-T)$, et d'autre part, que pour n assez grand, $\|x_n - z_n - d_n u\| < d_n$. Or ceci contredit la définition de d_n. Donc la suite (d_n) est bornée et $y \in \mathbf{Im}(I-T)$, ce qui prouve le deuxième point.

(3) On suppose maintenant que l'opérateur $I-T$ est injectif. Pour démontrer sa surjectivité, on va utiliser un lemme général.

Lemme 2.17. *Si F est un sous-espace fermé strict d'un espace vectoriel normé E. alors il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u, F) \geq 1/2$.*

En effect, si $v \in E \backslash F$ et $\delta = d(v, F) > 0$, alors il existe $w \in F$ tel que $\|v-w\| < 2\delta$. Mais alors le point $u = \|v-w\|^{-1}(v-w)$ convient. En effet, si $z \in F$, alors

$$\|u-z\| = \|v-w\|^{-1}\|v-w-\|v-w\|z\| \geq \frac{1}{2\delta}\delta = \frac{1}{2}$$

et le lemme est démontré.

Reprenons la démonstration du point 3.

Raisonnons maintenant par l'absurde. Soit $E_1 = \mathbf{Im}(I-T)$ et supposons que $E_1 \neq E$. Soit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbf{Im}(I-T)^n$ (et $E_0 = E$).

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est fermé. $E_n \supset E_{n+1}$ et $E_n \neq E_{n+1}$. La propriété est vraie pour $n = 0$ par hypothèse. Supposons la vérifiée pour l'entier $n \in \mathbb{N}$. Clairement, $T\left(E_n\right) \subset E_n$ et donc T induit un opérateur $T_n \in \mathscr{L}\left(E_n\right)$. Comme E_n est fermé. $T_n\left(\bar{B}\left(E_n\right)\right)$ est inclus dans $\overline{T(\bar{B}(E))} \cap E_n$ qui est compact. Donc T_n est un opérateur compact de E_n. Comme $E_{n+1} = \left(I_n - T_n\right)\left(E_n\right)$ (où I_n est l'identité de E_n), alors, d'après le point (2) appliqué à T_n, E_{n+1} est fermé dans E_n et donc dans E. Il est d'autre part clair que $E_{n+1} \subset E_{n+2}$. Enfin, puisque $I-T$ est injectif par hypothèse,

$$E_n \neq E_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \left(E_{n+1} = (I-T)\left(E_n\right)\right) \neq \left(E_{n+2} = (I-T)\left(E_{n+1}\right)\right).$$

Ceci étant, il existe d'après le lemme 2.17 une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in E_n$ on a $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_{n+1}) \geq 1/2$. Alors, pour $n < m$.

$$Tu_n - Tu_m = u_n - v_{n,m} \quad \text{avec} \quad v_{n,m} = Tu_m + (I-T)u_n \in E_{n+1}.$$

Il en résulte que

$$\forall n \neq m \quad \|Tu_n - Tu_m\| \geq 1/2$$

Comme tous les points de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\bar{B}(E)$, ceci contredit la relative compacité de $T\left(\bar{B}(E)\ \right)$ (en effet, aucune suite extraite de $(Tu_n)_{n\in\mathrm{I}}$ n'est de Cauchy). On a donc démontré par l'absurde la surjectivité de $I - T$.

Reste à démontrer la continuité de $(I-T)^{-1}$. Là encore on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tendant pas vers 0 telle que $\lim_{n\to+\infty}(x_n - Tx_n) = 0$ (ce qui exprime la non continuité de $(I-T)^{-1}$ en 0). En extrayant au besoin une sous-suite, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \geq \epsilon$, pour un certain $\epsilon > 0$. Soit alors $u_n = x_n / \|x_n\|$. L'opérateur T étant compact, on peut supposer, quitte à nouveau à en extraire une sous-suite, que la suite $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $v \in E$. Mais alors $\lim_{n\to\infty} u_n = v$, ce qui entraîne que $\|v\| = 1$ et, par continuité de T, que $v = Tv$, ce qui contredit le caractère injectif de $I - T$.

□

3. Spectres d'opérateurs

On considère E un espace vectoriel normé.

Définition 3.1. *Soit $T \in \mathscr{L}(E)$. On appelle* **valeur spectrale** *de T tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda I - T$ ne soit pas inversible. L'ensemble des valeurs spectrales de T est appelé le* **spectre** *de T et noté $\sigma(T)$,*

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda I - T \textit{ n'est pas inversible}\}$$

Un élément de $\mathbb{K}$ qui n'est pas valeur spectrale de T est appelé valeur **résolvante** *de T. L'ensemble des valeurs résolvantes est donc $\mathbb{K} \setminus \sigma(T)$.*

On appelle **valeur propre** *de T tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda I - T$ ne soit pas injectif. L'ensemble des valeurs propres de T est noté $vp(T)$,*

$$vp(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \mathbf{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$$

et on appelle multiplicité de la valeur propre λ, la dimension du sous-espace propre $\mathbf{Ker}(T - \lambda I)$.

Remarque 3.2. (1) On a toujours $vp(T) \subset \sigma(T)$.

(2) L'inclusion réciproque en général fausse, sauf en dimension finie : si E est dimension infinie, $T - \lambda I$ non inversible n'implique pas nécessairement $T - \lambda I$ non injectif.

(3) Soit $\dim E < \infty$ alors $T - \lambda I$ injectif $\Leftrightarrow$ $T - \lambda I$ inversible. Il en résulte que le spectre $\sigma(T) = vp(T)$.

Exemple 3.3. Soient $E = \mathscr{C}([0,1])$ et T l'opérateur associant à $f \in E$ la fonction Tf définie par

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

On voit immédiatement que $\mathbf{Ker}\, T = \{0\}$ et $\mathbf{Im}\, T = \{g \in C^1([0,1])$ tel que $g(0) = 0\}$. Ainsi, T est injectif et non surjectif ; en d'autre termes, $0 \notin vp(T)$ et $0 \in \sigma(T)$.

Nous allons maintenant démontrer que 0 est la seule valeur spectrale de T. Soient pour cela $\lambda \neq 0$ et $g \in E$. Si $f \in E$ satisfait l'équation

$$(\lambda I - T)f = \lambda f - Tf = g, \tag{1}$$

alors la fonction $h = Tf$ est un élément de $\mathscr{C}^1([0,1])$ tel que

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda h' - h = g. \tag{2}$$

Réciproquement, si $h \in \mathscr{C}^1([0,1])$ satisfait (2), alors la fonction $f = h'$ est solution de (1). Or on peut vérifier que l'équation différentielle (2) a pour solution unique

$$h(x) = \frac{e^{x/\lambda}}{\lambda} \int_0^x g(t) e^{-t/\lambda} dt$$

Ainsi,

$$\lambda f - Tf = g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\lambda}\left(g(x) + \frac{e^{x/\lambda}}{\lambda} \int_0^x g(t) e^{-t/\lambda} dt \right),$$

d'où l'on déduit que λ est une valeur résolvante de T et que

$$[(\lambda I - T)^{-1} g](x) = \frac{1}{\lambda}\left(g(x) + \frac{e^{x/\lambda}}{\lambda} \int_0^x g(t) e^{-t/\lambda} dt \right)$$

Finalement, $vp(T) = \emptyset$ et $\sigma(T) = \{0\}$.

Exemple 3.4. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$ et soit l'opérateur sur ℓ^2 donné par

$$T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Comme $(T - \lambda I)x = ((\lambda_k - \lambda)\, x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ alors $(T - \lambda I)^{-1} y = \left(\frac{y_k}{\lambda_k - \lambda}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Il en résulte que $(T - \lambda I)^{-1}$ est un opérateur borné si et seulement si λ n'est pas dans l'adhérence de $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, qui n'est autre que $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$.

Comme $Te_k = \lambda_k e_k$, pour e_k élément de la base canonique de ℓ^2, on en déduit que tous les λ_k sont des valeurs propres de T. Mais 0 n'est pas valeur propre car T est injective (puisque tous les $\lambda_k \neq 0$).

D'où : $\sigma(T) = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$ et $vp(T) = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.5. Considérons l'opérateur de multiplication $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ donné par

$$(Tf)(t) = tf(t)$$

Comme $(T - \lambda I)f(t) = (t - \lambda)f(t)$, si $(T - \lambda I)^{-1}$ existe, nous aurons $(T - \lambda I)^{-1} y(t) = \frac{1}{t-\lambda} y(t)$.

Si $\lambda \notin [0,1]$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-\lambda}$ est bornée, d'où $(T - \lambda I)^{-1}$ est un opérateur borné. Inversement, si $\lambda \in [0,1]$, alors $\frac{1}{t-\lambda} \notin L^2[0,1]$ en raison de la singularité non-intégrable en

$t=\lambda$. D'où $T-\lambda I$ n'est pas inversible (prendre par exemple $y(t)\equiv 1$). Par conséquent, $\sigma(T)=[0,1]$.

Supposons que λ soit une valeur propre de T avec f un vecteur propre dans $L^2([0,1])$. Cela signifie que l'identité suivante est vérifiée

$$(t-\lambda)f(t)=0 \text{ pour tout } t\in[0,1]$$

Il en résulte que $f=0$ dans $L^2([0,1])$. Par conséquent, T n'a pas de valeurs propres. D'où $vp(T)=\varnothing$.

Proposition 3.6. *Soit $T\in\mathscr{L}(E)$. La limite $\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}$ existe et*

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}=\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\|T^n\|^{1/n}$$

Cette valeur commune est notée $\rho(T)$.
D'autre part, le spectre $\sigma(T)$ est une partie compacte de $\mathbb{K}$ et

$$\forall\lambda\in\sigma(T)\quad|\lambda|\le\rho(T).$$

En particulier, on a $\rho(T)\le\|T\|$ et donc

$$\forall\lambda\in\sigma(T)\quad|\lambda|\le\|T\|.$$

Démonstration. (1) Soit $a=\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\|T^n\|^{1/n}$. Bien sûr,

$$a\le\liminf_{n\to+\infty}\|T^n\|^{1/n}$$

Soit $\epsilon>0$ et soit $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $\|T^{n_0}\|^{1/n_0}\le a+\epsilon$. Soit alors $n\in\mathbb{N}^*$. On a $n=p(n)n_0+q(n)$, avec $p(n)\in\mathbb{N},q(n)\in\mathbb{N}$ et $0\le q(n)<n_0$ (division euclidienne de n par n_0). Donc

$$\|T^n\|\le\|T^{n_0}\|^{p(n)}\|T\|^{q(n)}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}q(n)/n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}p(n)/n=1/n_0$, on en déduit que

$$\limsup\|T^n\|^{1/n}\le\|T^{n_0}\|^{1/n_0}\le a+\epsilon$$

Ceci étant valable pour tout $\epsilon>0$, cela démontre que $\lim_{n\to+\infty}\|T^n\|^{1/n}=a$.

(2) L'application $\lambda\mapsto(\lambda I-T)$, de $\mathbb{K}$ dans $L(E)$, est clairement continue. Donc, d'après la proposition 1.1 $\rho(T)$ est ouvert et $\sigma(T)$ est fermé. Il ne reste donc plus qu'à démontrer que $\sigma(T)$ est borné par $\rho(T)$.

(3) Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $|\lambda|>\rho(T)$. Soit également $r\in]\rho(T),|\lambda|[$. Comme $r>\rho(T)$, il existe un entier $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n\ge n_0\quad\|T^n\|\le r^n$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^{-n-1}T^n$ est alors normalement convergente dans $\mathscr{L}(E)$ (car $r<|\lambda|$) et il est facile de voir que

$$(\lambda I-T)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^{-n-1}T^n\right)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^{-n-1}T^n\right)(\lambda I-T)=I$$

et donc que $\lambda\notin\sigma(T)$. Ceci étant vrai dès que $|\lambda|>\rho(T)$, cela achève la démonstration. $\square$

Exemple 3.7. Rappelons l'exemple 3.3. Soient $E = \mathscr{C}([0,1])$ et T l'opérateur associant à $f \in E$ la fonction Tf définie par

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

On a trouvé $vp(T) = \emptyset$ et $\sigma(T) = \{0\}$.

Il est clair que $\|T\| = 1$. D'autre part, un calcul aisé par récurrence montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$$

et donc que $\|T^n\| \leq 1/n!$, ce qui entraîne que $\rho(T) = 0$. On voit ici que $\rho(T) < \|T\|$.

Définition 3.8. *Si $T \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$ est une valeur résolvante, alors la* **résolvante** *de T est*

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$$

Proposition 3.9. *Soit $T \in \mathscr{L}(E)$. Alors on a l'équation résolvante :*

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \mu \in \rho(T) \quad R(\lambda, T) - R(\mu, T) &= (\mu - \lambda) R(\lambda, T) R(\mu, T) \\ &= (\mu - \lambda) R(\mu, T) R(\lambda, T) \end{aligned}$$

D'autre part, l'application $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$, de l'ouvert $\mathbb{R} \setminus \sigma(T)$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathscr{L}(E)$, est dérivable et

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, T) = -R(\lambda, T)^2$$

Démonstration. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} R(\lambda, T) - R(\mu, T) &= R(\lambda, T)[(\mu I - T) - (\lambda I - T)] R(\mu, T) \\ &= (\mu - \lambda) R(\lambda, T) R(\mu, T) \end{aligned}$$

ce qui démontre l'équation résolvante. En particulier.

$$\frac{1}{h}(R(\lambda + h, T) - R(\lambda, T)) = -R(\lambda, T) R(\lambda + h, T)$$

avec $h \in \mathbb{K}^*$ et $\lambda, \lambda + h \in \rho(T)$. D'après la continuité de l'application $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$, conséquence immédiate de la proposition 1.1, et la continuité du produit dans $\mathscr{L}(E)$, on obtient

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(R(\lambda + h, T) - R(\lambda . T)) = -[R(\lambda, T)]^2,$$

ce qui achève la démonstration. □

On sait que, si E est de dimension finie, le spectre de T peut être vide si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mais qu'il ne l'est pas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (le théorème de D 'Alembert assurant que le polynôme caractéristique de T admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$). On va démontrer que ceci est aussi vrai si E est de dimension infinie.

Théorème 3.10. *Soit E un espace de Banach* <u>*complexe*</u> *et $T \in \mathscr{L}(E)$. Alors le spectre de T n'est pas vide et de plus.*

$$\rho(T) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}$$

Démonstration. (1) Notons, pour $z \in \rho(T)$, $R_z = R(z,T)$. D'après la la démonstration de la proposition 3.6 on sait que si $|z| > \rho(T)$ alors

$$R_z = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n-1} T^n.$$

la série étant normalement convergente dans $\mathscr{L}(E)$. On en déduit que, pour tout $t \in]\rho(T), +\infty[$,

$$R_{te^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-i(n+1)\theta} t^{-n-1} T^n$$

la série convergeant uniformément par rapport à $\theta \in \mathbb{R}$ dans $\mathscr{L}(E)$. On obtient, d'après la continuité de l'intégrale de Riemann à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$,

$$\int_0^{2\pi} \left(te^{i\theta}\right)^{p+1} R_{te^{i\theta}} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(te^{i\theta}\right)^{p-n} T^n d\theta = 2\pi T^p$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $t > \rho(T)$,

$$T^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(te^{i\theta}\right)^{p+1} R_{te^{i\theta}} d\theta$$

(2) Montrons que le spectre de T n'est pas vide. Supposons le contraire. Par l'égalité précédente avec $p = 0$,

$$\forall t > \rho(T) \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} te^{i\theta} R_{te^{i\theta}} d\theta$$

Or $\sigma(T)$ est vide (et donc l'ensemble des valeurs resolvantes est $\mathbb{C}$), donc la fonction J_0 définie par

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} te^{i\theta} R_{te^{i\theta}} d\theta$$

est définie et continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall t > 0 \quad \frac{dJ_0}{dt}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(te^{i\theta} R_{te^{i\theta}}\right) d\theta$$

Mais, d'après la proposition 3.9 la fonction $z \mapsto R_z$ est dérivable (i.e. holomorphe) de $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ dans $L(E)$, donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(te^{i\theta} R_{te^{i\theta}}\right) = e^{i\theta} \left\{ \frac{d}{dz} (zR_z) \right\}_{z=te^{i\theta}}$$

et
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(te^{i\theta}R_{te^{i\theta}}\right)=ite^{i\theta}\left\{\frac{d}{dz}\left(zR_z\right)\right\}_{z=te^{i\theta}}$$
Ainsi, $\forall t>0$,
$$\begin{aligned}\frac{dJ_0}{dt}(t)&=\frac{1}{2i\pi t}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}[te^{i\theta}R_{te^{i\theta}}]d\theta\\&=\frac{1}{2i\pi t}[te^{i\theta}R_{te^{i\theta}}]_0^{2\pi}\\&=0\end{aligned}$$
On en déduit (théorème des accroissements finis pour les fonctions à valeurs dans les espaces de Banach) que J_0 est constant sur $[0,+\infty[$, ce qui est faux car $J_0(0)=0$ et, pour $t>\rho(T)$, $J_0(t)=I$. Donc $\sigma(T)$ n'est pas vide.

(3) Soit $\rho=\max\{|\lambda|;\lambda\in\sigma(T)\}$. On sait (proposition 3.6) que $\rho\leq\rho(T)$. Posons, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t>\rho$,
$$J_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(te^{i\theta}\right)^{n+1}R_{te^{i\theta}}d\theta.$$
On voit comme précédemment que $dJ_n/dt=0$ sur $]\rho,+\infty[$. Donc, pour tout $t>\rho$, $J_n(t)=T^n$. Notons maintenant $M_t=\max\left\{\left\|R_{te^{i\theta}}\right\|,\theta\in[0,2\pi]\right\}$. Alors
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\forall t>\rho\qquad\|T^n\|\leq t^{n+1}M_t,$$
ce qui implique que pour tout $t>\rho,\rho(T)\leq t$ et donc finalement $\rho(T)\leq\rho$. □

Proposition 3.11. *Soit H est un espace de Hilbert et $T\in\mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors toutes les valeurs propres de T sont réelles, c.-à-d. $vp(T)\subset\mathbb{R}$, et les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.*

Démonstration. Comme T est auto-adjoint, alors pour tout $x\in H$, $\langle Tx,x\rangle=\langle x,Tx\rangle=\overline{\langle Tx,x\rangle}$, et $\langle Tx,x\rangle\in\mathbb{R}$.

Soit λ une valeur propre de T et x un vecteur propre associé. Alors $\langle Tx,x\rangle=\langle\lambda x,x\rangle$, donc, $\lambda=\frac{\langle Tx,x\rangle}{\langle x,x\rangle}=\frac{\langle Tx,x\rangle}{\|x\|^2}\in\mathbb{R}$.

Si μ est une autre valeur propre de T et y un vecteur propre associé, alors
$$\lambda\langle x,y\rangle=\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle=\bar{\mu}\langle x,y\rangle=\mu\langle x,y\rangle.$$
Il en résulte que $(\lambda-\mu)\langle x,y\rangle=0$. Comme $\lambda\neq\mu$, on aura $\langle x,y\rangle=0$

□

Proposition 3.12. *Soit H est un espace de Hilbert et $T\in\mathscr{L}(H)$ un opérateur compact auto-adjoint de H. Alors il existe $\lambda\in vp(T)$ telle que $|\lambda|=\|T\|$.*
Par conséquent, $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est valeur propre de T.

Démonstration. On pose $\alpha=\|T\|$. On suppose que $\alpha\neq0$, sinon $T=0$. Alors
$$\alpha^2=\|T\|^2=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx,Tx\rangle=\sup_{\|x\|=1}\left\langle T^2x,x\right\rangle$$

Soit $(x_n) \in H$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \langle T^2 x_n, x_n\rangle = \alpha^2$.

$$\begin{aligned}\left\|\left(T^2-\alpha^2 I\right) x_n\right\|^2 &= \left\|T^2 x_n - \alpha^2 x_n\right\|^2 \\ &= \|Tx\|^4 + \alpha^4\|x\|^2 - 2\alpha^2 \left\langle T^2 x_n, x_n\right\rangle \\ &\leq \alpha^4 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \left\langle T^2 x_n, x_n\right\rangle\end{aligned}$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \|(T^2-\alpha^2 I)\, x_n\| = 0$. Comme T est compact, il existe une sous-suite, $\left(T^2 x_{\phi(n)}\right)$ qui converge vers un $y \in H$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \alpha^2 x_{\phi(n)} = y \neq 0$. On pose $u = \frac{y}{\alpha^2}$. Le passage à la limite donne $T^2(u) = \alpha^2 u$ i.e.

$$0 = \left(T^2 - \alpha^2 I\right) = (T+\alpha I)(T-\alpha I)u.$$

Si $(T-\alpha I)u = 0$, alors $\|T\|$ est valeur propre de T, sinon $v = (T-\alpha I)u \neq 0$ et $(T+\alpha I)v = 0$, donc $-\|T\|$ est valeur propre de T.

□

Remarque 3.13. L'ensemble des valeurs propres $vp(T)$ est donc contenu dans $[-\|T\|, \|T\|]$ et $\|T\|$ est la plus grande valeur propre, en module.

En effet, soit λ une valeur propre et x un vecteur propre associé de norme 1 alors $|\lambda| = |\langle Tx, x\rangle| \leq \|T\|\|x\|^2 = \|T\|$.

Nous commençons par donner quelques propriétés spectrales des opérateurs compacts.

Théorème 3.14. *Soit E un espace de Banach et soit $T \in \mathscr{L}(E)$ un opérateur compact.*

(1) *Si $\dim E = \infty$, alors 0 est une valeur spectrale de T.*

(2) *On a $\sigma(T) \setminus \{0\} = vp(T) \setminus \{0\}$ et le sous-espace propre de toute valeur propre non nulle est de dimension finie.*

(3) *Le spectre de T est dénombrable. S'il est infini, on peut ranger ses éléments non nuls en une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0.$$

En d'autres termes, soit $vp(T)$ est fini, soit c'est une suite qui converge vers 0.

Démonstration. (1) Supposons que 0 n'est pas valeur spectrale de T. Alors $I = TT^{-1}$ est un opérateur compact d'après la proposition 2.4 ; ainsi la boule unité $\bar{B}_E$ est compacte, et donc, d'après le théorème de Riesz, E est de dimension finie.

(2) Soit $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Alors $\lambda I - T$ n'est pas inversible. Or d'après proposition 2.16, $\mathbf{Ker}(\lambda I - T) = \mathbf{Ker}(I - \frac{1}{\lambda}T)$ est de dimension finie ($\frac{1}{\lambda}T$ est compact), donc $\lambda I - T$ n'est pas injective et $\lambda \in vp(T) \setminus \{0\}$.

(3) Pour démontrer (3) , il suffit de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un nombre fini (peut-être nul) de valeurs spectrales λ de T telles que $|\lambda| \geq \varepsilon$. Supposons au contraire que, pour un certain $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeurs spectrales de T deux à deux distinctes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}, |\lambda_n| \geq \varepsilon$. D'après le point 2 , tous les λ_n sont des valeurs propres de T. Il existe donc une suite (e_n) d'éléments de E de norme 1 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Te_n = \lambda_n e_n$. Les valeurs propres λ_n étant deux à deux distinctes, la famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. Soit, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, E_n l'espace vectoriel engendré par ses $n+1$ premiers vecteurs $e_0, \ldots, e_n$. La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors

une suite strictement croissante d'espaces de dimensions finies. D'après le lemme 2.17, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de norme 1 telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in E_{n+1} \quad \text{et} \quad d\,(u_n, E_n) \geq 1/2$$

Posons $v_n = \lambda_{n+1}^{-1} u_n$. La suite (v_n) est bornée (par $1/\varepsilon$). D'autre part, si $n > m$, alors

$$Tv_n - Tv_m = u_n - v_{n,m} \quad \text{avec} \quad v_{n,m} = Tv_m + \frac{1}{\lambda_{n+1}}\,(\lambda_{n+1} I - T)\,u_n$$

Or $Tv_m \in E_{m+1} \subset E_n$ et $(\lambda_{n+1} I - T)\,(E_{n+1}) \subset E_n$. Donc $v_{n,m} \in E_n$ et $\|Tv_n - Tv_m\| \geq 1/2$, ce qui est en contradiction avec le fait que l'opérateur T est compact (en effet, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et son image par T n'admet aucune sous-suite de Cauchy et donc aucune sous-suite convergente).

□

Exemple 3.15. On considère l'opérateur T sur l'espace $\mathscr{C}([0,1])$ (muni de la norme uniforme) défini par

$$\forall f \in \mathscr{C}([0,1]) \quad Tf(x) = \int_0^{1-x} f(t)dt.$$

Clairement, T est linéaire et continu, puisque $\|Tf\|_\infty = \sup_x |Tf(x)| \leqslant \|f\|_\infty \sup_x |1 - x| = \|f\|_\infty$. Soit $\bar{B}$ la boule unité fermée de $\mathscr{C}([0,1])$. Alors $T(\bar{B})$ est une partie bornée de $\mathscr{C}([0,1)$. De plus si $x_1, x_2 \in [0,1]$, on a $|Tf(x_2) - Tf(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1|\ \|f\|_\infty$, ce qui montre que $T(\bar{B})$ est une partie equicontinue de $\mathscr{C}([0,1])$. On déduit alors par le théorème d'Ascoli que l'opérateur T est compact.

D'après le théorème 3.14, 0 est une valeur spectrale de T mais, clairement, n'en est pas une valeur propre. Toujours d'après le théorème 3.14, $vp(T) = vp(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$. Pour déterminer explicitement son spectre, il suffit de déterminer ses valeurs propres.

Soit donc λ une valeur propre de T et soit $g \in \mathscr{C}([0,1]), g \neq 0$, tel que

$$\forall x \in [0,1] \quad \lambda g(x) = \int_0^{1-x} g(t)dt.$$

Comme λ n'est pas nul, cela entraine que nécessairement g est de classe C^1 dans $[0,1]$, que $g(1) = 0$ et que

$$\forall x \in [0,1] \quad \lambda g'(x) = -g(1-x).$$

On en déduit que g est de classe C^2 dans $[0,1]$ et que

$$g \neq 0, \quad g(1) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad \lambda g'(1) = -g(0) \tag{3}$$

$$\forall x \in [0,1] \quad \lambda g''(x) = -g(x)/\lambda \tag{4}$$

Les solutions de l'équation différentielle (4) telles que $g'(0) = 0$ sont les fonctions $g(x) = A\cos(x/\lambda)$. Pour qu'une telle fonction satisfasse les conditions (3), il est nécessaire que $\cos(1/\lambda) = 0$ et $\sin(1/\lambda) = 1$, soit $1/\lambda = \pi/2 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, ou

$$\lambda = \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Réciproquement, si $\lambda = 1/(\pi/2 + 2k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on vérifie facilement que la fonction g définie par $g(x) = \cos(x/\lambda)$ est un vecteur propre de T associé à λ. Ainsi,

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On voit de plus que les sous-espaces propres de l'opérateur T sont tous de dimension 1 et que son rayon spectral est égal à $2/\pi$.

Proposition 3.16. *Soit H un espace de Hilbert. Le rayon spectral d'un opérateur auto-adjoint sur H est égal à sa norme.*

Démonstration. Si T est hermitien, alors, d'après la proposition 5.8 du chapitre 3, $\|T^2\| = \|T\|^2$. En itérant cette propriété (ce qui est possible puisque le carré d'un opérateur hermitien est hermitien), on obtient

$$\forall n \in \mathrm{N} \quad \left\|T^{2^n}\right\| = \|T\|^{2^n}.$$

Donc

$$\rho(T) = \lim_{n \to +\infty} \left\|T^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = \|T\|$$

(la limite de la suite $\left(\|T^n\|^{1/n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ étant égale à la limite de toutes ses sous-suites). □

Lemme 3.17. *Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in \mathscr{L}(H)$. Alors*
(*i*) $\mathbf{Ker}\, T = (\mathbf{Im}\, T^*)^{\perp}$;
(*ii*) $\overline{\mathbf{Im}\, T} = (\mathbf{Ker}\, T^*)^{\perp}$;
(*iii*) *T est inversible si et seulement si T^* l'est aussi et, dans ce cas, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Démonstration. Soit $x \in H$, alors $x \in \mathbf{Ker}\, T$ si et seulement si, pour tout $y \in H$, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0$, ce qui démontre le premier point. Le deuxième en est une conséquence de $\overline{\mathbf{Im}\, T} = (\mathbf{Im}\, T^{\perp})^{\perp}$ et le fait que $T^{**} = T$. Enfin, si T est inversible, alors $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ et, $(T^{-1})^* T^* = T^* (T^{-1})^* = I$. Donc T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

Proposition 3.18. *Soit H un espace de Hilbert. Soit T un opérateur auto-adjoint sur H. On pose*

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle,$$
$$M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle.$$

Alors $\sigma(T) \subset [m, M], m \in \sigma(T)$ et $M \in \sigma(T)$. Autrement dit $[m, M]$ est le plus petit intervalle contenant le spectre de T

Démonstration. (1) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et x un élément non nul de H. Alors

$$\langle \lambda x - Tx, x\rangle = \left(\lambda - \left\langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right) \|x\|^2.$$

Notons $d(\lambda)$ la distance de λ à l'intervalle $[m, M]$:

$$d(\lambda) = \min\{|\lambda - t|, \text{ avec } t \in [m, M]\}$$

Alors, par l'inégalité de Schwarz et la définition de m et M,

$$\|\lambda x - Tx\|\|x\| \geq |\langle \lambda x - Tx, x\rangle| \geq d(\lambda)\|x\|^2.$$

Il en résulte que

$$\forall x \in H \quad \|\lambda x - Tx\| \geq d(\lambda)\|x\|. \tag{5}$$

Supposons que $\lambda \notin [m, M]$. Alors $d(\lambda) > 0$ et, d'après (5), $\lambda I - T$ est injectif. Montrons maintenant que $\mathbf{Im}(\lambda I - T)$ est fermé. Si $(y_n = \lambda x_n - Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbf{Im}(\lambda I - T)$ qui converge vers $y \in H$, alors, d'après (5). la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc converge vers un $x \in H$, pour lequel on a clairement $\lambda x - Tx = y$. Donc $y \in \mathbf{Im}(\lambda I - T)$. On déduit alors de le lemme 3.17 que

$$\mathbf{Im}(\lambda I - T) = (\mathbf{Ker}(\bar{\lambda} I - T))^{\perp}.$$

Mais, comme $\bar{\lambda} \notin [m, M]$, l'opérateur $\bar{\lambda} I - T$ est injectif lui aussi. On en déduit que $\lambda I - T$ est une bijection de H sur E. Comme, d'après 5, son application réciproque est continue (et de norme inférieure ou égale à $1/d(\lambda)$), il vient que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Donc $\sigma(T) \in [m, M]$.

(2) Démontrons par exemple que $m \in \sigma(T)$. (Que $M \in \sigma(T)$ s'en déduit en changeant T en $-T$.) Soit $S = T - mI$. Par définition de m, S est un opérateur hermitien positif. L'application $(x, y) \mapsto \langle Sx, y\rangle$ est alors une une forme sesquilinéaire positive sur H. D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall x, y \in H \quad |\langle Sx, y\rangle|^2 \leq \langle Sx, x\rangle \ \langle Sy, y\rangle. \tag{6}$$

D'autre part, par définition de m, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H de norme 1 telle que $\lim_{n\to+\infty}\langle Sx_n, x_n\rangle = 0$. D'après (6),

$$\|Sx_n\|^2 \leq \langle Sx_n, x_n\rangle^{1/2}\langle S^2x_n, Sx_n\rangle^{1/2} \leq \langle Sx_n, x_n\rangle^{1/2}\|S\|^{1/2}\,\|Sx_n\|\,,$$

donc

$$\|Sx_n\| \leq \|S\|^{1/2}\langle Sx_n, x_n\rangle^{1/2},$$

ce qui entraine que $\lim\ _{n\to+\infty}Sx_n = 0$. Si m n'était pas valeur spectrale de T, alors S serait inversible dans $\mathscr{L}(H)$ et $x_n = S^{-1}Sx_n$ tendrait vers 0 , ce qui est absurde. Donc $m \in \sigma(T)$.

□

Corollaire 3.19. *Un opérateur hermitien T sur E est hermitien positif si et seulement si son spectre $\sigma(T)$ est contenu dans $\mathbb{R}^+$. Si c'est le cas, alors $\|T\| \in \sigma(T)$.*

4. Théorème spectral pour les opérateurs compacts auto-adjoints

Le théorème spectral d'algèbre linéaire affirme que tout opérateur normal (i.e. tout opérateur qui commute avec son adjoint) dans un espace de Hilbert complexe de dimension finie est diagonalisable dans une base orthonormée. Nous allons voir ici comment se généralise cette propriété en dimension infinie. Nous restreignons l'étude aux opérateurs auto-adjoints compacts, mais les résultats s'étendent presque à l'identique aux opérateurs normaux compacts sur un espace de Hilbert complexe. Par contre, l'hypothèse de compacité est indispensable. Par exemple, on peut vérifier simplement que l'opérateur T défini sur l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$ par

$$\forall f \in L^2([0,1]) \quad Tf(x) = xf(x)$$

est auto-adjoint et n'a pas de valeur propre.

On considère dans tout ce paragraphe un espace préhilbertien E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et un opérateur T auto-adjoint et compact sur E.

Supposons que T est de rang fini. Comme, pour tout $x \in E$.

$$Tx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in E \quad \langle Tx, y\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (\operatorname{Im} T)^{\perp},$$

on voit que $\mathbf{Ker}\, T = (\mathbf{Im}\, T)^{\perp}$ et, puisque $\mathbf{Im}\, T$ est de dimension finie (donc fermé), $E = \mathbf{Im}\, T \oplus \mathbf{Ker}\, T$. L'opérateur T induit alors sur l'espace de dimension finie $\mathbf{Im}\, T$ un opérateur auto-adjoint inversible dont les valeurs propres sont égales aux valeurs propres non nulles de T. D'après le résultat de diagonalisation des opérateurs hermitiens (ou symétriques) en dimension finie, on en déduit que $\mathbf{Im}\, T$ est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de T associés aux valeurs propres non nulles et donc que

$$E = \bigoplus_{\lambda \in vp(T)} \mathbf{Ker}(\lambda I - T).$$

Nous allons maintenant généraliser cette propriété de diagonalisation au cas où T est un opérateur auto-adjoint compact quelconque et nous supposerons dans tout ce qui suit que T n'est pas de rang fini.

Lemme 4.1. *Soit S un opérateur auto-adjoint compact sur un espace préhilbertien F non réduit à $\{0\}$. Alors S admet au moins une valeur propre et*

$$\max\{|\lambda|; \lambda \in vp(S)\} = \|S\|.$$

Démonstration. Si λ est une valeur propre de S, alors $|\lambda| \leq \|S\|$. D'autre part, on sait d'après la proposition 3.18 qu'il existe une valeur spectrale λ de S telle que $|\lambda| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Sx, x\rangle|$, qui est égal à $\|S\|$ d'après la proposition 5.11 du chapitre 3 (dont la démonstration n'utilise pas le caractère complet de l'espace E). Comme on peut supposer $S \neq 0$ (sinon le résultat est trivial), λ n'est pas nul et donc λ est une valeur propre d'après le théorème 3.14.

□

Théorème 4.2. *Soit E un espace de préhilbertien et soit $T \in \mathscr{L}(E)$ un opérateur auto-adjoint compact. Notons $\Lambda = vp(T)$, $\Lambda^* = vp(T)\backslash\{0\}$ et, pour chaque valeur propre λ, E_λ le sous-espace propre de T associé à λ.*

(1) *L'ensemble Λ est une partie infinie dénombrable et bornée de $\mathbb{R}$. dont le seul point d'accumulation est 0 .*

(2) *Tous les sous-espaces propres de T correspondant à des valeurs propres non nulles de T sont de dimension finie.*

(3) *Soit, pour chaque valeur propre non nulle λ de T, P_λ le projecteur orthogonal sur E_λ. Alors*

$$T = \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \lambda P_\lambda,$$

Démonstration. (1) Le fait que les valeurs propres de T sont réelles et la propriété d'orthogonalité de ses sous-espaces propres proviennent les points (1) et (3) de la proposition 2.16, (points dont la démonstration n'utilise pas le caractère complet de l'espace E) et le fait que la dimension de chaque sous-espace propre de T correspondant à une valeur propre non nulle est finie provient du théorème 3.14.

(2) Démontrons que Λ^* est infini. D'après le lemme 4.1 , il existe une valeur propre λ de T telle que $|\lambda| = \|T\|$. Puisque T n'est pas nul (car T n'est pas de rang fini), on en déduit que $\lambda \neq 0$ et donc que Λ^* n'est pas vide. Supposons que T ait un nombre fini de valeurs propres non nulles : $\Lambda^* = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Soient alors $G = \oplus_{j=1}^k E_\lambda$, et $F = G^\perp$. Puisque G est de dimension finie, alors $E = F \oplus G$. Il est clair que $T(G) \subset G$. Puisque T est auto-adjoint, on en déduit rapidement que $T(F) \subset F$. L'opérateur T induit donc un opérateur T_F de F dans F et l'on vérifie facilement que T_F est compact puisque F est fermé. Bien sûr, T_F est un opérateur auto-adjoint non nul de F (si $T_F = 0$, alors $\operatorname{Im} T \subset G$, ce qui contredit le fait que T n'est pas de rang fini). D'après le lemme 4.1, T_F admet une valeur propre non nulle λ. Mais l'on voit alors que λ est une valeur propre non nulle de T qui est différente de tous les $\lambda_j, 1 \leq j \leq k$, puisqu'un de ses vecteurs propres associés est un élément de F et donc n'appartient pas à G. On est donc parvenu à une contradiction. Il en résulte que Λ^* est infini et, d'après le théorème 3.14, Λ est dénombrable et admet 0 comme seul point d'accumulation.

(3) Soit J une partie finie de Λ^* et soient $G_J = \oplus_{\lambda \in J} E_\lambda$, $F_J = G_J^\perp$. En raisonnant comme ci-dessus et en utilisant le lemme 4.1, on voit que T induit sur F_J un opérateur auto-adjoint compact T_{F_J} dont la norme vaut $\|T_{F_J}\| = \max_{\lambda \in \mathrm{vp}(T_{F_J})} |\lambda|$. Or, comme précédemment, toute valeur propre λ de T_{F_J} est valeur propre de T mais n'appartient pas à J, puisque par construction, F_J a une intersection réduite à $\{0\}$ avec les espaces propres E_μ. pour $\mu \in J$. Donc $\mathrm{vp}\,(T_{F_J}) \subset \Lambda \backslash J$. Réciproquement. si $\lambda \in \Lambda \backslash J$, alors (orthogonalité des espaces propres) $E_\lambda \subset G_J^\perp = F_J$ et donc λ est une valeur propre de T_{F_J}. Donc $\mathrm{vp}\,(T_{F_J}) = \Lambda \backslash J$ et

$$\|T_{F_J}\| = \max_{\lambda \in \Lambda \backslash J} |\lambda|.$$

Par ailleurs, le projecteur orthogonal sur G_J est $\sum_{\lambda \in J} P_\lambda$. Donc, pour tout $x \in E, x - \sum_{\lambda \in J} P_\lambda x \in F_J$ et

$$\|T(x - \sum_{\lambda \in J} P_\lambda x)\| = \|T_{F_J}(x - \sum_{\lambda \in J} P_\lambda x)\| \leq \|x - \sum_{\lambda \in J} P_\lambda x\| \max_{\lambda \in \Lambda \backslash J} |\lambda|$$

Puisque, par orthogonalité,

$$\|x - \sum_{\lambda \in J} P_\lambda x\| \leq \|x\|$$

(théorème de Pythagore), on en déduit que

$$\|T - \sum_{\lambda \in J} TP_\lambda\| \leq \max_{\lambda \in \Lambda \backslash J} |\lambda|$$

Or, par définition de P_λ, $TP_\lambda = \lambda P_\lambda$ et donc

$$\|T - \sum_{\lambda \in J} \lambda P_\lambda\| \leq \max_{\lambda \in \Lambda \backslash J} |\lambda|$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Puisque 0 est le seul point d'accumulation de Λ, l'ensemble $K = \{\lambda \in \Lambda \text{ t.q. } |\lambda| \geq \varepsilon\}$ est fini. Mais alors, pour toute partie finie J de Λ^* contenant K,

$$\|T - \sum_{\lambda \in J} \lambda P_\lambda\| \leq \max_{\lambda \in \Lambda \setminus J} |\lambda| \leq \max_{\lambda \in \Lambda \setminus K} |\lambda| \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre le troisième point du théorème.

□

Corollaire 4.3. *Avec les notations du théorème ci-dessus,*

$$\overline{\mathbf{Im}\, T} = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda^*} E_\lambda}.$$

Démonstration. On sait que, pour tout $x \in E$,

$$Tx = \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \lambda P_\lambda x$$

Il en résulte que $\mathbf{Im}\, T \subset \overline{\oplus_{\lambda \in \Lambda^*} E_\lambda}$ et donc $\overline{\mathbf{Im}\, T} \subset \overline{\oplus_{\lambda \in \Lambda^*} E_\lambda}$. Mais par ailleurs, si $\lambda \in \Lambda^*$, alors clairement $E_\lambda \subset \mathrm{Im}\, T$, ce qui démontre l'inclusion inverse. □

Le théorème 4.2 et le corollaire 4 peuvent s'exprimer de la façon suivante :

Corollaire 4.4. (1) *L'espace $\overline{\mathbf{Im}\, T}$ admet une base hilbertienne dénombrable $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formée de vecteurs propres de T correspondant à des valeurs propres non nulles.*

(2) *La suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des valeurs propres correspondantes aux vecteurs f_n tend vers 0 et, pour tout $x \in E$,*

$$Tx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle x, f_n \rangle f_n$$

La base hilbertienne (f_n) s'obtient simplement en effectuant la réunion des bases hilbertiennes (finies) de tous les sous-espaces propres de T correspondant à des valeurs propres non nulles. Remarquer que dans la suite (λ_n), chaque valeur propre non nulle λ de T apparaît d_λ fois, où d_λ est la dimension du sous-espace propre correspondant E_λ.

Le premier point du corollaire 4.4 affirme en particulier que, pour tout $x \in \overline{\mathbf{Im}\, T}$,

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, f_n \rangle f_n,$$

c'est-à-dire :

Corollaire 4.5. *Pour tout $x \in \overline{\mathbf{Im}\, T}$,*

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda^*} P_\lambda x.$$

Corollaire 4.6. *Qn suppose que E est complet. Soit P_0 le projecteur orthogonal sur $E_0 = \mathbf{Ker}\, T$. Alors, pour tout $x \in E$,*

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda x$$

et de plus,

$$E = \overline{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda}.$$

Démonstration. Comme T est auto-adjoint, $E_0 = \mathbf{Ker}\, T = \overline{\mathbf{Im}\, T}^{\perp}$. Donc, si E est complet, $E = E_0 \oplus \overline{\mathbf{Im}\, T}$. □

Si de plus E est séparable, alors $\mathbf{Ker}\, T$ l'est également et admet donc une base hilbertienne dénombrable. En effectuant la réunion de celle-ci avec la base hilbertienne de $\overline{\mathbf{Im}\, T}$ construite dans le corollaire 4.4, on obtient alors le résultat de diagonalisation suivant :

Corollaire 4.7. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Ce résultat est encore vrai si E est un espace de Hilbert quelconque, mais dans ce cas il faut utiliser l'axiome du choix pour garantir l'existence d'une base hilbertienne de $\operatorname{Ker} T$ et donc de E.

URL: `http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Analyse-M1/`