# CHAPITRE 2
# ESPACES DE LEBESGUE

Table des matières



On rappelle qu'une tribu (ou $\sigma$-algèbre) sur un ensemble $X$ est une famille $\mathcal{A}$ de parties de $X$ vérifiant :

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
(ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $X \backslash A \in \mathcal{A}$ ;
(iii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé espace mesurable.

Une mesure (positive) est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ qui satisfait
(i) $\mu(\emptyset) = 0$ ;
(ii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu\left(A_n\right)$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé espace mesuré.

Pour les fonctions $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ on munit implicitement l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ainsi, $f$ est $\mathcal{A}$-mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ce qui est encore équivalent à $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$ (On dira aussi “$f$ mesurable ” s'il n'y a pas ambiguïté sur la tribu de $X$).

## 1. Espaces $\mathscr{L}^p$

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

**Définition 1.1.** *Soit $p \in [1, +\infty[$. Etant donnée une fonction $f$ mesurable de $X$ dans $\mathbb{K}$, on note*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty]$$

*On notera $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ou $\mathscr{L}^p(X)$ ou $\mathscr{L}^p(\mu)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{K}$ telles que*

$$\|f\|_p < +\infty.$$

---

*Date*: 10 décembre 2024 • http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Analyse-M1/.

Attention à la calligraphie ! Le $\mathscr{L}$ ("$L$ rond"), qui ne doit pas être confondu avec un $L$ droit tel qu'il apparaitra un peu plus loin.

**Exemple 1.2.** Soient $p \in [1, +\infty[$ et $\alpha > 0$.

(1) Pour $x \geqslant 1$ on pose $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Alors $f_\alpha$ appartient à $\mathscr{L}^p([1, +\infty[)$ si et seulement si $\alpha p > 1$.

(2) Pour $x \in ]0, 1]$ on pose $g_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Alors $g_\alpha$ appartient à $\mathscr{L}^p(]0, 1])$ si et seulement si $\alpha p < 1$.

(3) Pour $x > 0$ on pose $h_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Alors $h_\alpha$ n'appartient pas à $\mathscr{L}^p(]0, +\infty[)$.

(4) Si $\mu$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ (i.e. $\mu(A) = \operatorname{card} A$), alors $\mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ n'est autre que l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$, avec

$$\|u\|_p = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \; u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Définition 1.3.** *Étant donnée une fonction $f$ mesurable de $X$ dans $\mathbb{K}$, on note*

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| &= \inf\{C \geqslant 0 \;:\; |f| \leqslant C \text{ presque partout } \} \quad \in [0, +\infty] \\ &= \inf\{C \geqslant 0 \;:\; \mu(\{|f| > C\}) = 0\}. \end{aligned}$$

*On notera $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ou $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X)$ ou $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ s'il n'y a pas d'ambiguité) l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{K}$ telles que*

$$\|f\|_\infty < +\infty$$

*On dit alors que $f$ est essentiellement bornée.*

Notons que $\|f\|_\infty = +\infty$ s'il n'existe pas de $C \geqslant 0$ tel que $|f| \leqslant C$ presque partout.

Si $\mu$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, alors $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ n'est autre que l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites bornées, avec

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|, \; u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Exemple 1.4.** Considéons comme exemple sur $\mathbb{R}$ la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Cette fonction est bornée. De plus, étant donné $C \geqslant 0$, on a $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}| \leqslant C$ presque partout, du fait que $\mathbb{Q}$ est de mesure de Lebesgue nulle. Cela prouve que $\|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\|_\infty = 0$.

D'une manière générale, toute fonction bornée est essentiellement bornée et on a $\sup_X |f| \geqslant \|f\|_\infty$. Cette inégalité peut être stricte comme le montre l'exemple précédent : $\sup_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 1$ et $\|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\|_\infty = 0$.

Considérons maintenant sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$\chi : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Cette fonction est nulle sauf sur $\mathbb{Q}$ qui est de mesure de Lebesgue nulle et on a $\|\chi\|_\infty = 0$. Pourtant $\chi$ n'est ni majorée ni minorée et donc pas bornée.

L'application $\|\cdot\|_p$ (resp. $\|\cdot\|_\infty$) est appelée **norme** $\mathscr{L}^p$ (resp. **norme** $\mathscr{L}^\infty$). Cette terminologie inappropriée sera justifiée plus loin.

Rappelons que $\|f\|_\infty$ est définie comme étant la borne inférieure de l'ensemble des de $C \geqslant 0$ verifiant la propriété

$$|f| \leqslant C \text{ presque partout}$$

Mais cela n'implique pas a priori que la propriété est vérifiée pour $C = \|f\|_\infty$.
La proposition suivante assure que c'est bien le cas.

**Proposition 1.5.** *Soit $f \in \mathscr{L}^\infty(X)$. Alors pour presque tout $x \in X$ on a*

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty.$$

*Démonstration.* Le résultat est clair si $\|f\|_\infty = +\infty$. On suppose maintenant que $f$ est essentiellement bornée. Pour $C \geqslant 0$ on note

$$A_C = \{x \in X \ : \ |f(x)| > C\}$$

C'est une partie mesurable de $X$, comme image réciproque de l'ouvert $]C, +\infty[$ par la fonction mesurable $|f|$.

Soit $C > \|f\|_\infty$. Par définition de $\|f\|_\infty$, il existe $C' \leqslant C$ tel que $\mu(A_{C'}) = 0$. Puisque $A_C \subset A_{C'}$, on a également $\mu(A_C) = 0$. Ainsi $A_C$ est de mesure nulle pour tout $C > \|f\|_\infty$. On observe ensuite que

$$A_{\|f\|_\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_{\|f\|_\infty + \frac{1}{n}}$$

Puisque $A_{\|f\|_\infty + \frac{1}{n}}$ est de mesure nulle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cela prouve que $\mu\left(A_{\|f\|_\infty}\right) = 0$. Autrement dit, on a bien $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle. $\square$

Pour les fonctions continues on a égalité entre (le sup essentiel) $\|f\|_\infty$ et $\sup |f|$ :

**Proposition 1.6.** *Si $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

*Démonstration.* On suppose $\|f\|_\infty < \infty$.

- On suppose d'abord $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = +\infty$, c-à-d. $|f|$ est non bornée.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Comme $|f|$ est non bornée, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| > \alpha$. Par continuité de $f$, il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $|f(y)| > \alpha$ pour tout $y \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. On a donc $\{|f| > \alpha\} \supset [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ et donc $\lambda(\{|f| > \alpha\}) \geq 2\varepsilon$. Donc, $|f|$ n'est pas inférieure ou égale à $\alpha$ p.p.. On a donc $\{C \in \mathbb{R}_+ \ ; \ |f| \leq \mathrm{C} \text{ p.p.}\} = \emptyset$, donc $\|f\|_\infty = +\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

- On suppose maintenant que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < +\infty$. On a $|f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

D'autre part, on sait que $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p.. On a donc $\lambda\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0$. Or $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ est ouvert (car $f$ est continue), c'est donc un ouvert de mesure nulle, on a donc $\{|f| > \|f\|_\infty\} = \emptyset$ (la mesure de Lebesgue d'un ouvert non vide est toujours strictement positive), ce qui prouve $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq \|f\|_\infty$.

On obtient bien finalement $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty$.

□

Contrairement à ce que la notation suggère, l'application $\|\cdot\|_p$ pour $p \in [1, +\infty]$ n'est pas en général pas des norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}^p(X)$ !
En effet, si $f$ est une fonction mesurable sur $X$ qui est nulle presque partout mais pas partout, alors on a

$$f \neq 0 \text{ et } \|f\|_p = 0.$$

Cela contredit évidemment la définition d'une norme. On verra plus loin comment surmonter cette difficulté.

## 2. Inégalités de Hölder et de Minkowski

On va commencer par montrer l'inégalité de Hölder, qui sera importante pour travailler dans les espaces $\mathscr{L}^p(X)$.

Les espaces $\mathscr{L}^p(X)$ ne sont pas stables par produit (à part pour $p = +\infty$). Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler que le produit de deux fonctions intégrables n'est en général pas intégrable.

Par contre, le produit $fg$ d'une fonction intégrable $f$ et d'une fonction bornée $g$ est intégrable, et son intégrale est inférieure ou égale au produit de l'intégrale de $f$ et de la borne supérieure de $g$.

Avec l'inégalité de Hölder, on va commencer à donner des conditions suffisantes pour que le produit de deux fonctions soit intégrable.

**Définition 2.1.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$. On dit que $p$ et $q$ sont des exposants conjugués si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Exemple 2.2.** Par convention naturelle on $1/\infty = 0$.
On note donc que 1 et $+\infty$ sont conjugués, tandis que 2 est conjugué à lui-même. Par exemple, l'exposant conjugué de 3 et $\frac{3}{2}$. Plus généralement, un exposant $p \in ]1, 2[$ est toujours conjugué à un exposant $q \in ]2, +\infty[$, et inversement.

**Théorème 2.3** (Inégalité de Hölder)**.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugués. Soient $f$ et $g$ deux fonctions mesurables de $X$ dans $\mathbb{R}$. Alors on a*

$$\left| \int_X fg d\mu \right| \leqslant \int_X |fg| d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \tag{1}$$

*En particulier, pour $f \in \mathscr{L}^p(X)$ et $g \in \mathscr{L}^q(X)$ on a $fg \in \mathscr{L}^1(X)$.*
*En outre, si $p$ et $q$ sont finis, il y a égalité dans (1) si et seulement si, il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$, tels que $\alpha\|f\|^p = \beta\|g\|^q$ $\mu - p.p.$.*

*Démonstration.* Le produit $fg$ est bien mesurable comme produit de deux fonctions mesurables.

La première inégalité dans (1) découle de l'inégalité triangulaire. Montrons la deuxième inégalité de (1).

Si $f$ ou $g$ est presque partout nulle, c'est également le cas pour le produit $fg$. Dans ce cas le membre de gauche dans (1) est nul, donc l'inégalité est bien vérifiée. On peut donc supposer que $f$ et $g$ ne sont pas presque partout nulles.

Si $\|f\|_p = \infty$ ou $\|g\|_q = \infty$, alors l'inégalité est encore automatiquement vraie. On peut donc aussi supposer que $\|f\|_p < \infty$ et $\|f\|_p < \infty$.

On suppose que $p = 1$ et $q = \infty$ (le cas $p = \infty, q = 1$, est analogue). Comme $|(fg)(x)| \leqslant |f(x)|\|g\|_\infty$ pour presque tout $x \in X$ on a bien

$$\int_X |fg|d\mu \leqslant \|g\|_\infty \int_X |f|d\mu = \|f\|_1\|g\|_\infty.$$

On considère maintenant le cas $p, q \in ]1, \infty[$. Pour $x \in X$ on note

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}$$

D'après l'inégalité de Young [1] on a, pour tout $x \in X$,

$$|F(x)G(x)| \leqslant \frac{|F(x)|^p}{p} + \frac{|G(x)|^q}{q}.$$

Tous ces termes définissent des fonctions mesurables. Après intégration, on obtient

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_X |fg|d\mu = \int_X |FG|d\mu \leqslant \frac{1}{p}\int_X |F|^p d\mu + \frac{1}{q}\int_X |G|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

D'où le résultat.

L'égalité dans l'inégalité de Hölder est laisser en exercice.

□

**Corollaire 2.4.** *Si $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\forall f, g \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(X), \quad f\bar{g} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(X) \ \text{ et } \ \left|\int_X f\bar{g}d\mu\right| \leq \|f\|_2\|g\|_2$$

*avec égalité si et seulement si $f = 0$ $\mu$-presque partout ou $g = cf$ $\mu$-presque partout, avec $c \in \mathbb{C}$.*

Comme autre application de l'inégalité de Hölder on a l'inégalité de Minkowski que l'on montre maintenant. Cette inégalité donne en particulier l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$.

**Théorème 2.5** (Inégalité de Minkowski)**.** (1) *Soient $p \in [1, +\infty]$. Alors pour deux fonctions mesurables $f$ et $g$ on a*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \tag{2}$$

1. Inégalité de Young : soient $p > 0, q > 0$ deux exposants conjugués, alors pour tous réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, on a $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

*En particulier, pour $f, g \in \mathscr{L}^p(X)$ on a $f + g \in \mathscr{L}^p(X)$.*

(2) *De plus,*

*- si $p > 1$, il y a égalité si et seulement si $f = 0$ $\mu$-p.p. ou $g = \alpha f$ $\mu$-p.p., pour un $\alpha \geq 0$,*

*- si $p = 1$, il y a égalité si et seulement si $\bar{g} \geq 0$ $\mu$-p .p.*

*Démonstration.* (1) Il suffit de montrer (2). On rappelle que la somme de deux fonctions mesurables est mesurable. En outre, l'inégalité (2) est claire si $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_p = +\infty$.

On suppose donc que $f$ et $g$ sont dans $\mathscr{L}^p(X)$.

Puisque $|f + g| \leqslant |f| + |g|$, le résultat est clair pour $p = 1$ et $p = +\infty$.

On suppose maintenant que $p \in ]1, +\infty[$. Puisque

$$\|f + g\|_p \leqslant \||f| + |g|\|_p$$

et

$$\||f|\|_p + \||g|\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$$

il suffit de considérer le cas où $f$ et $g$ sont à valeurs positives.

Par convexité de la fonction $t \mapsto t^p$ sur $\mathbb{R}_+$ on a, pour tout $x \in X$,

$$\left(\frac{f(x) + g(x)}{2}\right)^p \leqslant \frac{f(x)^p + g(x)^p}{2}$$

ou encore

$$(f(x) + g(x))^p \leqslant 2^{p-1}\left(f(x)^p + g(x)^p\right).$$

Cela prouve que $f + g$ est dans $\mathscr{L}^p(X)$.

De plus, en partant de

$$(f(x) + g(x))^p = f(x)(f(x) + g(x))^{p-1} + g(x)(f(x) + g(x)^{p-1}$$

en intégrant par rapport à $\mu$ il vient

$$\|f + g\|_p^p = \int_X f(f + g)^{p-1} d\mu + \int_X g(f + g)^{p-1} d\mu.$$

L'inégalité de Hölder entraîne

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p \left(\int_X (f + g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p \left(\int_X (f + g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

où les exposants $p$ et $q$ sont conjugués ; en particulier, $(p - 1)q = p$. Donc

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}$$

Comme $f + g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X)$, $\|f + g\|_p < +\infty$, on peut donc simplifier par $\|f + g\|_p^{p-1}$, l'inégalité étant triviale si $\|f + g\|_p = 0$.

(2) Le cas d'égalité est laissé en exercice.

□

**Proposition 2.6.** *Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors $\mathscr{L}^p(X)$ est un espace vectoriel et l'application*

$$\begin{cases} \mathscr{L}^p(X) & \to & [0, +\infty[ \\ f & \mapsto & \|f\|_p \end{cases}$$

*est une semi-norme.*

*Démonstration.* On vérifie que $\in \mathscr{L}^p(X)$ est un s.e.v. du $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ des fonctions de $X$ dans $\mathbb{K}$.

Tout d'abord, il est immédiat la fonction nulle est dans $\in \mathscr{L}^p(X)$.

Ensuite il est claire que si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}^p(X)$ alors $\lambda f \in \mathscr{L}^p(X)$.

Finalement si $f, g \in \mathscr{L}^p(X)$, alors d'après l'inégaliré de Minkowski, $f + g \in \mathscr{L}^p(X)$.

L'application $f \mapsto \|f\|_p$ ne vérifie pas nécessairement le caractère defini : si $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ presque partout, mais pas forcément nulle. Cependant $\|\cdot\|_p$ vérifie toutes les autres propriétés d'une norme. C'est ce qu'on appelle une semi-norme. $\square$

Le problème du caractère défini de $\|\cdot\|_p$ sera résolu dans le paragraphe suivant.

## 3. Les espaces de Lebesgues $L^p$, $1 \leq p \leq +\infty$

On vient de voir que les espaces de Lebesgue $\mathscr{L}^p(X)$, munis des applications $\|\cdot\|_p$, sont quasiment des espaces vectoriels normés. Le seul problème est que deux fonctions égales presque partout sont considérées comme étant à distance nulle, alors qu'elles ne sont pas nécessairement égales.

Si on veut masquer la distinction entre deux fonctions presque partout égales et les identifier, le moyen rigoureux de procéder est de passer au quotient par rapport à cette relation d'égalité presque partout.

Nous allons d'abord donner quelques rappels sur les espaces quotient semi-normés.

**Définition 3.1.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle semi-norme toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant*

*(1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,*

*(2) $\forall x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.*

Toute norme est donc une semi-norme.

**Définition 3.2.** *Soit $(E, N)$ un $\mathbb{K}$-e.v. semi-normé. Alors le* **noyau** *de $N$ est le $\mathbb{K}$-s.e.v. de $E$*

$$F := \operatorname{Ker} N := \{x \in E \;:\; N(x) = 0\}.$$

Le fait que $\operatorname{Ker} N$ soit un $\mathbb{K}$-e.v. est immédiat puisque $0_E \in F$ et si $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $N(\lambda x + y) \leq |\lambda| N(x) + N(y) = 0$.

On souhaite associer canoniquement à cet espace semi-normé un $\mathbb{K}$-e.v. normé qui soit aussi "proche" que possible de $(E, N)$. Pour ce faire on introduit la relation binaire sur $E$ définie par

$$\forall x, y \in E, \quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in F \Leftrightarrow N(x - y) = 0.$$

On vérifie que $\sim$ est une relation d'équivalence, compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire (i.e. si $x \sim x'$ et $y \sim y'$ alors $\lambda x + y \sim \lambda x' + y'$ ). En conséquence, l'ensemble quotient

$$\bar{E} = \{\bar{x} \ : \ x \in E\} = E/\sim$$

des classes d'équivalence de la relation $\sim$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{K}$-e.v., dite structure d'e.v. quotient, définie à partir des opérations :

$$\bar{x} + \bar{y} := \overline{x+y} \text{ et } \lambda \cdot \bar{x} := \overline{\lambda \cdot x}.$$

Notons que la classe d'équivalent d'un élément $x \in E$ est $\bar{x} = x + F$.

L'ensemble $\bar{E}$, généralement noté $E/F$, est appelé l'**espace quotient** de $E$ par $F$. On le munit alors d'une (vraie) norme en posant :

$$\bar{N}(\bar{x}) := N(x)$$

Cette définition est cohérente car la valeur de $N(x)$ est constante lorsque $x$ varie au sein d'une classe d'équivalence. En effet, si $x \sim y, x - y \in F$ et partant, $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) = 0$.

On a ainsi construit un $\mathbb{K}$-e.v. normé, à savoir $(E/F, \bar{N})$, qui canoniquement associé au $\mathbb{K}$-e.v. semi-normé $(E, N)$.

Lorsque $p \geq 1$, les espaces normés $L^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ se construisent à partir des espaces semi-normés $(\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{M}, \mu), \|\cdot\|_p)$ quotientés par la rélation “être égal $\mu - p.p.$”. Par abus de notation, on notera encore $\|\cdot\|_p$ la norme sur les classes d'équivalences.

**Définition 3.3.** *On pose*

$$L^p_{\mathbb{K}}(X) := \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X) / \{\|\cdot\|_p = 0\}$$

Autrement dit, un élément de $L^p(X)$ est une classe d'équivalence d'éléments de $\mathscr{L}^p(X)$.

Par commodité on fera l'abus de notation de parler de fonctions de $L^p(X)$. Cela signifie qu'on parle en fait de n'importe quelle fonction dans une classe d'équivalence. Quand on donne une propriété d'une fonction de $L^p(X)$, il faut donc qu'elle soit valable pour n'importe quel représentant de la classe d'équivalence. Cela fonctionne avec l'intégrale. Les fonctions d'une même classe d'équivalence sont soit toutes intégrables, soit aucune ne l'est. Et si elles sont toutes intégrables, alors elles sont toutes la même intégrale.

On a, pour $f \in \mathscr{L}^p(X)$, $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $|f|^p = 0 \ \mu - p.p.$, donc

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0, \ \mu - p.p.$$

En conséquence, la classe d'équivalence de $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ qu'on va noter $[f]$ est de la forme

$$[f] = \{g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \ : \ g = f, \ \mu - p.p.\}$$

Si $f$ et $g$ sont égales presque partout, alors on a $\|f\|_p = \|g\|_p$, donc si $[f]$ ou $[g]$ est la classe d'équivalence commune de $f$ et $g$ on peut poser

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p$$

Comme évoqué dans le cas général, cette définition est bien cohérente car elle ne dépend pas du choix d'un représentant.

**Proposition 3.4.** $(L^p_{\mathbb{K}}(X), \|\cdot\|_p)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé.*

*Démonstration.* Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathscr{L}^p(X)$ tels que $f_1 = f_2$ *p.p.* et $g_1 = g_2$ *p.p.* Alors on a $f_1+g_1 = f_2+g_2$ *p.p.* et $\lambda f_1 = \lambda f_2$ *p.p.* Ainsi, si on note $[f],[g] \in L^p(X)$ les classes d'équivalence des fonctions $f, g \in \mathscr{L}^p(X)$ on peut définir

$$[f] + [g] = [f+g], \quad \text{et} \quad \lambda[f] = [\lambda f]$$

On vérifie que cela munit $L^p(X)$ d'une structure d'espace vectoriel. De même, la semi-norme $\|\cdot\|_p$ définit une semi-norme sur $L^p(X)$. De plus, si $\|[f]\|_p = 0$ on a $f = 0$ *p.p.* et donc $[f] = [0]$, d'où le caractère défini. □

**Remarque 3.5.** Si l'on munit un espace $X = \mathbb{N}$ de la mesure de comptage $m$, alors

$$L^p(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m) = \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m) = \ell^p(\mathbb{N})$$

**Théorème 3.6** (Théorème de Riesz-Fisher)**.** *Soit* $p \in [1, +\infty]$*. L'espace de Lebesgue* $L^p(X)$*, muni de la norme* $\|\cdot\|_p$*, est un espace de Banach.*

*Démonstration.* Supposons d'abord $1 \leq p < \infty$. Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans $L^p(X)$, alors il existe un suite croissante $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que

$$k, \ell > n_i \Rightarrow \|f_k - f_\ell\|_p < \frac{1}{2^i},\ i = 1, 2, \cdots$$

Posons

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|, \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|.$$

Par l'inégalitré de Minkowski (généralisée) on a pour tout $k$,

$$\|g_k\|_p = \left\| \sum_{i=1}^{k} \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right| \right\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} < 1$$

et d'après le Lemme de Fatou [2]

$$\|g\|_p^p = \int_X g^p d\mu \leqslant \int_X \liminf_k g_k^p d\mu \leqslant \liminf_k \int_X g_k^p d\mu \leqslant \liminf_k \|g_k\|_p^p \leqslant 1$$

ce qui montre que $g(x) < \infty$ pour presque tout $x \in X$. Ainsi il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $g(x) < \infty$ pour tout $x \in X \setminus A$.

Pour $x \in X \setminus A$, la serie

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)$$

2. Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur $X$ à valeurs dans $[0, +\infty]$, la limite inférieure de la suite est mesurable et l'on a : $\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$

est absolument convergente. On peut alors définir $f(x)$ comme la somme de cette série lorsqu'elle converge, et posons $f(x) = 0$ sur l'ensemble restant qui est de mesure nulle,

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x) & \text{si } x \in X \setminus A \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Puis que

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} f_{n_{i+1}} - f_{n_i} = f_k$$

on vois que

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x) \quad p.p.$$

De plus l'inégalité de Minkowski et le lemme de Fatou assurent que

$$\int_X |f|^p d\mu \leqslant \int_X |f_{n_1}|^p d\mu + \int_X \liminf_k |g_k|^p d\mu \leqslant \int_X |f_{n_1}|^p + 1 < \infty$$

ce qui montre que $f \in L^p(X)$.

Il faut maintenant montrer que cette fonction est la limte de la suite $(f_n)_n$ au sens de $L^p$ (i.e. pour la norme $\|\cdot\|_p$).

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N$ tel que $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ pour tout $n, m > N$. Pour tout $m > N$, le lemme de Fatou montre donc que

$$\int_X |f - f_m|^p \, d\mu \leq \liminf_{i \to \infty} \int_X |f_{n_i} - f_m|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p$$

Cette inégalité permet d'affirmer que $f - f_m \in L^p(X)$, puis que $f \in L^p(X)$ (car c'est un e.v.), et finalement que $\|f - f_m\|_p \to 0$ quand $m \to \infty$. Ce qui achève la démonstration pour $p < \infty$

Le cas $p = +\infty$ découle de la proposition suivante.

$\square$

**Proposition 3.7.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}^\infty(X)$. Alors il existe $f \in \mathscr{L}^\infty(X)$ telle que $(f_n)_n$ converge vers $f$ simplement presque partout et dans $\mathscr{L}^\infty(X)$.*

*Démonstration.* Pour $n, m \in \mathbb{N}$ on note

$$A_n = \{x \in X \ : \ |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\},$$

et

$$B_{n,m} = \{x \in X \ : \ |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

Ces ensembles sont mesurables de mesures nulles, donc si on note

$$E = \left( \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \cup \left( \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{n,m} \right)$$

on a également $E \in \mathcal{M}$ et $\mu(E) = 0$.

Soit $x \in X \backslash E$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n,m\to 0]{} 0$$

Ainsi la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une limite, qu'on note $f(x)$. On la prolonge à $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = 0$ pour $x \in E$. Par définition, $(f_n)_n$ converge donc simplement presque partout vers $f$. En outre, la fonction $f$ ainsi définie est mesurable et pour tout $x \in X$ on a

$$|f(x)| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} |f_n(x)| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty .$$

Puisque la suite $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, cela prouve que $f \in \mathscr{L}^\infty(X)$. De même, on a aussi

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \liminf_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty$$

donc

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \liminf_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Cela conclut la démonstration. $\square$

**Corollaire 3.8.** *L'espace de Lebesgue $L^2_{\mathbb{C}}(X)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par*

$$\forall f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(X), \quad \langle f, g\rangle = \int_X f\bar{g}d\mu.$$

On reviendra sur ce cas au chapitre 3.

**Remarque 3.9.** En général, si $p \in [1, +\infty]\backslash\{2\}$, alors la norme $\|\cdot\|_p$ n'est associée à aucun produit scalaire, et donc $L^p(X)$ ne peut pas être vu comme un espace de Hilbert. Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, il suffit pour s'en convaincre d'essayer d'appliquer l'identité du parallèlogramme

$$\|f + g\|_p^2 + \|f - g\|_p^2 = 2\left(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2\right)$$

avec les fonctions $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $g = \mathbb{1}_{[1,2]}$.

Pour conclure cette section, nous allons examiner les liens entre convergence $L^p$ et convergence $\mu - p.p.$

Le résultat suivant découle de la démonstration du théorème de Riesz-Fisher.

**Corollaire 3.10** (Extraction d'une sous-suite convergeant simplement)**.** *Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $(f_n)$ une suite convergeant dans $L^p(X)$ vers une fonction $f$. Alors, il existe une suite extraite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)$ tel que*

(1) *$(f_{n_k})_k$ converge vers $f$, $\mu - p.p.$*

(2) *il existe $g \in L^p(X)$ tel que pour tout $k \geq 0$ on a $|f_{n_k}| \leq g, \mu - p.p.$.*

Dans le cas $p = +\infty$, on a bien sûr beaucoup mieux : $f_n \to f$ uniformément en dehors d'un ensemble négligeable (en particulier, $f_n \to f, \mu - p.p.$, pas besoin de sous-suite).

**Corollaire 3.11.** *Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^p(X)$. Si $(f_n)$ converge vers $f$ dans $L^p$ et $(f_n)_n$ converge vers $g, \mu - p.p.$, alors $f$ et $g$ sont égales $\mu - p.p.$*

*Démonstration.* On sait qu'il existe une suite extraite $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ qui converge $\mu - p.p.$ vers $f$. Or la suite $(f_n)$ converge $\mu - p.p.$ vers $g$, donc la sous-suite $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ également. Ainsi $f = g$ $\mu - p.p.$.

□

**Remarque 3.12.** (1) On peut avoir une suite qui convergence dans $L^p$ mais pas $\mu$-p.p.. Comme exemple, on considère $X := [0,1], \mathscr{A} := \mathscr{B}([0,1])$ et $\mu := \lambda$, la mesure de Lebesgue.

On pose pour

$$f_{2^n+k} := 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} \ \ \forall n \geq 0, \forall k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}.$$

On vérifie que ceci définit bien une suite $(f_n)_{n\geq 1}$.

Il est clair que $\|f_{2^n+k}\|_p = 2^{-\frac{n}{p}} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

À l'inverse si, $x$ étant fixé dans $[0,1[$, on considère la suite de ses approximations par défaut :

$$\frac{k_n^x}{2^n} \leq x < \frac{k_n^x + 1}{2^n}, k_n^x \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$$

Il est clair que $f_{2^n+k_n^x}(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) La convergence $\mu$-pp dans $\mathscr{L}^p$ n'entraine pas en général la convergence dans $L^p$. Ce n'est dèjà pas vrai pour $p = 1$.

**Proposition 3.13** (Convergence $L^p$-dominée)**.** *Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit $(f_n)$ une suite de $L^p(X)$.*
*Si $f_n \to f$ $\mu$-pp et s'il existe $g \in L^p(X)$ tel que $|f_n| \leq g$ pour tout entier $n$, alors $(f_n)$ converge vers $f$ dans $L^p(X)$.*

Cet énoncé est en général faux dans $L^\infty$(X).

*Démonstration.* On applique le théorème de convergence dominée. En effet, $|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p |g|^p$ $\mu$-pp, et par hypothèse $|g|^p$ est intégrable, donc comme $|f_n - f|^p \to 0$ $\mu$-pp, et par suite $\int |f_n - f|^p d\mu \to 0$. □

On arrive enfin à l'énoncé du théorème de Banach-Alaoglu dans $L^p$.

**Théorème 3.14** (Banach-Alaoglu)**.** *Soit $1 < p < +\infty$ et $q$ l'exposant conjugé. Si $(f_n)$ est une suite bornée dans $L^p(X)$, alors existe une sous-suite $(f_{n_k})$ de $(f_n)$ et $f \in L^p(X)$ tel que vers $(f_{n_k})$ converge faiblement vers $f$, i.e. pour tout $g \in L^q(X)$,*

$$\int f_{n_k} g d\mu \to \int f g d\mu$$

*lorsque $k \to +\infty$.*

*Démonstration.* Voir [Lieb and Loss, p. 68] □

## 4. Parties denses

**Définition 4.1** (Fonction étagée). *$f : X \to \mathbb{K}$ est une fonction étagée si elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans $\mathbb{K}$. Ainsi, une fonction étagée est de la forme*

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

*où $I$ est fini, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une partition mesurable de $X$. Autrement dit, $f$ est combinaison linéaire (finie) de fonctions indicatrices.*

Comme exemples, on a
(1) les fonctions indicatrices $f = \mathbb{1}_A$, avec $A \in \mathcal{M}$, et dans ce cas $f = 1 \times \mathbb{1}_A + 0 \times \mathbb{1}_{X \setminus A}$ ;
(2) toute fonction en escalier $f : ([a, b], \mathcal{P}([a, b])) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Rappelons aussi que le support d'une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ est l'adherence de l'ensemble $\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}$. Donc $f$ est à support compact si elle s'annule en dehors d'un ensemble borné.

**Théorème 4.2.** (1) *L'espace vectoriel des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(X)$.*
(2) *Pour $1 \le p < \infty$, l'espace vectoriel des fonctions étagées à support compact est dense dans $L^p(X)$.*

*Démonstration.* Nous nous limitons au cas $p < \infty$.
Soit $f \in L^p(X)$. Si $f \ge 0$, par le théorème fondamental d'approximation [3] (voir Briane & Pagès, théorème 5.1), il existe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions étagées telles que

$$0 \le \varphi_n \le f, \quad \varphi_n \to f \quad \mu - p.p..$$

On a $\int_X |\varphi_n|^p \, d\mu \le \int_X |f|^p d\mu < +\infty$, d'où $\mu\left(\{\varphi_n \neq 0\}\right) < +\infty$ pour tout $n$ et donc $\varphi_n$ est à support compact.
De plus, la convergence simple et la domination $|f - \varphi_n|^p \le |2f|^p$ permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée : $\int_X |f - \varphi_n|^p \to 0$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire $\|f - \varphi_n\|_p \to 0$.
Pour $f$ arbitraire dans $L^p(X)$, on se ramène au cas $\ge 0$ en décomposant :

$$f = (\mathcal{R}ef)_+ - (\mathcal{R}ef)_- + i\left((\mathcal{I}mf)_+ - (\mathcal{I}mf)_-\right)$$

□

Lorsque $X = \mathbb{R}^d$, muni de la mesure de Lebesgue et de la tribu borélienne, on a :

**Corollaire 4.3.** *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, +\infty[$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe des nombres réels $(a_j)_{1 \le j \le m}$ et des ouverts $(U_j)_{1 \le j \le m}$ de mesure finie (et $m \in \mathbb{N}^*$) tels que*

$$\|f - \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbb{1}_{U_j}\| \le \epsilon.$$

3. Toute fonction mesurable positive est limite simple d'une suite croissante de fonction étagées positives, et toute fonction mesurable bornée est limite uniforme de fonction éétagées.

La démonstration du théorème suivant repose sur le Lemme d'Urysohn. Il en existe plusieurs version suivant le contexte. Nous donnons ici l'enoncé selon le context euclidien.

**Lemme 4.4** (Lemme d'Urysohn)**.** *Si $K \subset U \subset \mathbb{R}^d$ avec $K$ compact et $U$ ouvert, alors il existe une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $[0,1]$, à support compact, et qui vaut 1 sur $K$.*

**Théorème 4.5.** *L'espace vectoriel $\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$, des fonctions continues à support compact, est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, pour $1 \leq p < +\infty$.*

*Démonstration.* Soit $1 \leq p < \infty$. Par densité des fonctions étagées (Corollaire 4.3), il suffit d'approcher dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, par une fonction à support compact, la fonction caractéristique $\mathbb{1}_A$ d'un borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de mesure de Lebesgue finie. Pour cela, on utilise la régularité de la mesure $\lambda$ de Lebesgue [4] . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $K$ compact et $U$ ouvert tels que $K \subset A \subset U$ tel que $\lambda(U \backslash K) \leq \varepsilon$. Soit $U'$ ouvert borné tel que $K \subset U' \subset \overline{U'} \subset U$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $f : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ continue telle que $f = 1$ sur $K$ et $f = 0$ sur $\mathbb{R}^d \backslash U'$. En particulier, le support de $f$ est inclus dans $\overline{U'}$ donc compact ($\lambda(\overline{U'} \setminus K) < \infty$). De plus, $f - \mathbb{1}_A = 0$ sur $K$ et sur $\mathbb{R}^d \backslash U$. On en déduit

$$\int |f - \mathbb{1}_A|^p \, d\mu \leq \lambda(U \backslash K) \leq \varepsilon$$

ce qui permet de conclure. □

L'interêt de ces résultats est que pour montrer une propriété sur $L^p(\mathbb{R}^d)$, on la montre d'abord pour les fonctions continues à supports compacts et on l'étend ensuite à tout $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ par densité.

On va donner maintenant une applications du théorème de densité (Théorème 4.2).

**Proposition 4.6.** *Soit $p \in [1, +\infty]$.*

(1) *Si $p < \infty$, alors $L^p(\mathbb{R}^d)$ est séparable (admet une partie dénombrable dense).*

(2) *$L^\infty(\mathbb{R}^d)$ n'est pas séparable.*

*Démonstration.* (1) Supposons $p < \infty$. On considère le sous-espace $Q$ de fonctions en escalier sur $\mathbb{R}^d$ défini par

$$Q := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{\prod_{i=1}^d ]a_i, b_i[} \ : \ \alpha_k, a_i, b_i \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Alors $Q$ est dénombrable et dense dans $L^p\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right), \lambda\right)$ d'après le théorème 4.2.

(2) Pour montrer que $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ n'est pas séparable, on utilise un résultat vu au chapitre 1 [5]

La famille $\Sigma = \{\mathbb{1}_{B(x,r)},\ x \in \mathbb{R}^d,\ r > 0\}$ est non-dénombrable dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Les ouverts $O_f := B\left(\chi, \frac{1}{4}\right)$, $\chi \in \Sigma$, de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ sont 2 à 2 disjoints, ce qui montre la non-séparabilité. En effect, soit $\chi_1 \neq \chi_2$ dans $\Sigma$. Si $f \in B\left(\chi_1, \frac{1}{4}\right) \cap B\left(\chi_2, \frac{1}{4}\right)$. On a $\|\chi_1 - f\|_\infty < \frac{1}{4}$ et $\|\chi_2 - f\|_\infty < \frac{1}{4}$, donc $\|\chi_1 - \chi_2\|_\infty < \frac{1}{2} < 1$. Comme $\chi_1$ et $\chi_2$ sont

4. c-à-d. pour tout borélien $B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\Omega_\varepsilon$ et un fermé $F_\varepsilon$ tels que $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq \Omega_\varepsilon$ et $\lambda\left(\Omega_\varepsilon \backslash F_\varepsilon\right) \leqslant \varepsilon$

5. Soit $E$ un evn, admettant une famille $\left(O_i\right)_{i \in I}$ non-dénombrable d'ouverts 2 à 2 disjoints. Alors E n'est pas séparable.

des fonctions caractéristiques, on a nécessairement $\chi_1 = \chi_2$, ce qui est absurde. Ainsi $B(\chi_1, \frac{1}{4}) \cap B(\chi_2, \frac{1}{4}) = \emptyset$.

$\square$

On termine ce paragraphe avec une deuxième application utile du théorème de densité .

Pour $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^d$, on note

$$\tau_y f : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x-y) \end{cases}$$

On s'attend à ce que la translatée $\tau_y f$ soit proche de $f$ si $y$ est petit, et c'est bien le cas pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Ceci ne peut pas être le cas pour $p = \infty$. En effet si on considère $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\tau_y f = \mathbb{1}_{[y,1+y]}$, et par suite $\|\tau_y f - f\|_\infty = 1 \not\to 0$ pour tout $y$ non nul, même petit.

**Proposition 4.7.** *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors on a*

$$\|\tau_y f - f\|_p \xrightarrow[y \to 0]{} 0$$

*Démonstration.* On commence par montrer le résultat dans le cas où $f$ est continue à support compact. Soit $f \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et soit $K$ son support. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \|\tau_y f - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p d\mu \\ &\leqslant \int_K |f(x-y) - f(x)|^p d\mu \\ &\leqslant \mu(K) \left( \sup_{x \in K} |f(x-y) - f(x)| \right)^p . \end{aligned}$$

Le sup existe car $f$ est bornée sur $K$. Comme $f$ est continue sur $K$, alors d'après le théorème de Heine[6] $f$ est uniformément continue sur $K$, et par suite

$$\lim_{y \to 0} \sup_{x \in K} |f(x-y) - f(x)| = 0.$$

On montre maintenant le cas général par densité de $\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 4.2., il existe $g$ continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Pour $y \in \mathbb{R}^d$ on a aussi

$$\begin{aligned} \|\tau_y f - \tau_y g\|_p &= \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - g(x-y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

6. Théorème de Heine : Soient $(X, d)$ un espace métrique compact et $(Y, d')$ un espace métrique quelconque. Toute application continue de $X$ dans $Y$ est uniformément continue.

D'après le cas précédent, il existe $\delta > 0$ tel que, si $\|y\| \leqslant \delta$ on a $\|\tau_y g - g\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Pour un tel $y$ on a donc

$$\|\tau_y f - f\|_p \leqslant \|\tau_y f - \tau_y g\|_p + \|\tau_y g - g\| + \|g - f\|_p \leqslant \varepsilon$$

D'où le résultat.

□

## 5. Inclusions entre espaces de Lebesgue

Un première question que l'on peut se poser est de savoir si on peut "ranger" les espaces de Lebesgue du plus petit au plus gros. Vous avez tous en tête des fonctions qui sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et pas dans $L^2(\mathbb{R})$ et inversement. Par exemple, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}\mathbb{1}_{|t|>1}(t)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$ ; et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^2(\mathbb{R})$.

Le premier cas où on peut ordonner les espaces $L^p(X)$ concerne les mesures finies. Cela inclut donc la mesure de Lebesgue sur les segments de $\mathbb{R}$, ou plus généralement sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, mais aussi toutes les mesures de probabilités.

**Proposition 5.1.** *On suppose que $\mu(X) < +\infty$. Soient $p, q \in [1, +\infty]$. Si $p < q$ alors pour toute fonction $f$ mesurable sur $X$ on a*

$$\|f\|_p \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q \tag{3}$$

*En particulier,*

$$L^q(X) \subset L^p(X) \tag{4}$$

Attention au sens de l'inégalité (3), qui est opposé au sens de l'inclusion (4). Mais c'est cohérent, la norme de $L^q$ est la plus grande, donc la condition pour être dans $L^q$ est plus restrictive, donc $L^q$ est plus petit que $L^p$.

*Démonstration.* Il suffit de montrer (3) pour obtenir (4)

Si $q = \infty$ on a $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ presque partout, donc

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \leqslant \int_X \|f\|_\infty^p d\mu = \mu(X)\|f\|_\infty^p$$

et en prenant la puissance $1/p$ dans cette inégalité on obtient bien (3).

On suppose maintenant que $q < +\infty$. D'après l'inégalité de Hölder, avec les exposants conjugués $\frac{q}{p}$ et $\frac{q}{q-p}$, on a

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_X |f|^p d\mu = \int_X |f|^p \cdot 1 d\mu \\
&\leqslant \left(\int_X (|f|^p)^{\frac{q}{p}} d\mu\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_X 1^{\frac{q}{q-p}} d\mu\right)^{\frac{q-p}{q}} \\
&\leqslant \left(\int_X |f|^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_X 1 d\mu\right)^{1-\frac{p}{q}} \\
&\leqslant \mu(X)^{1-\frac{p}{q}}\|f\|_q^p
\end{aligned}$$

A nouveau, on conclut en prenant la puissance $1/p$ de cette inégalité. □

**Remarque 5.2.** Il y a aussi des situations ou l'inclusion (4) est inversée. Le cas typique est le cas où $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Dans ce cas on a déjà vu au chapitre 1 que si $p, q \in [1, +\infty[$ avec $p < q$ alors $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$. Ceci est un cas particulier de la proposition suivante.

**Proposition 5.3.** *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose qu'il existe $\mu_0 > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) \geqslant \mu_0$. Soient $p, q \in [1, +\infty]$. Si $p < q$ alors pour toute fonction mesurable $f$ sur $X$ on a*

$$\|f\|_q \leqslant \mu_0^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_p$$

*et en particulier*

$$L^p(X) \subset L^q(X)$$

*Démonstration.* Laissée en exercice □

**Proposition 5.4.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ avec $p < q$ et $r \in [p, q]$. Alors pour toute fonction $f$ mesurable sur $X$ on a*

$$\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$$

*où $\theta \in [0, 1]$ est tel que*

$$\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} = \frac{1}{r}.$$

*En particulier,*

$$L^p(X) \cap L^q(X) \subset L^r(X).$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer l'inégalité dans le cas $r \in ]p, q[$. Dans ce cas on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{p}{\theta r}$ et $\frac{q}{(1-\theta)r}$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_r^r = \int_X |f|^r d\mu &= \int_X |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} d\mu \\
&\leqslant \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int_X |f|^q d\mu\right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}} \\
&\leqslant \|f\|_p^{\theta r} \|f\|_q^{(1-\theta)r}
\end{aligned}$$

D'où le résultat en prenant la puissance $1/r$. □

On introduit maintenant sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{R}^d$ ) l'espace des fonctions localement intégrables, c'est-à-dire intégrables sur tout compact.

**Définition 5.5.** *On note $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}$ on a $f\mathbb{1}_K \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.*

*On note également $L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ le quotient de $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ par la relation d'égalité presque partout.*

Puisque sur un compact $K$ de $\mathbb{R}$ une fonction de $L^p$ est intégrable, on a le résultat suivant.

**Proposition 5.6.** *Pour tout $p \in [1, +\infty]$ on a*

$$L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$$

## 6. Dualité dans les espaces $L^p$

**Théorème 6.1.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ conjugués. Soit $g \in L^q(X)$. L'application*

$$\varphi_g : \begin{cases} L^p(X) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_X fg d\mu \end{cases}$$

*est une forme linéaire continue sur $L^p(X)$ et*

$$\|\varphi_g\|_{L^p(X)'} = \|g\|_{L^p(X)}.$$

*Démonstration.* L'application $\varphi_g$ est bien linéaire par linéarité de la multiplication par $g$ et de l'intégrale.

Soit $f \in L^p(X)$. D'après l'inégalité de Hölder le produit $fg$ est intégrable (donc $\varphi_g(f)$ est bien défini) et

$$|\varphi_g(f)| \leqslant \int_X |fg| d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Cela prouve que $\varphi_g$ est une forme linéaire continue sur $L^p(X)$ et

$$\|\varphi_g\|_{L^p(X)'} \leqslant \|g\|_q.$$

On définit maintenant une fonction $f$ par

$$f(x) = \begin{cases} |g(x)|^{q-2} g(x) & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } g(x) = 0 \end{cases}$$

Comme $p(q-1) = pq\left(1 - \frac{1}{q}\right) = q$, on a

$$\|f\|_p^p = \int_X |g|^{(q-1)p} d\mu = \int_X |g|^q d\mu = \|g\|_q^q.$$

En particulier, $f \in L^p(X)$. Or

$$\varphi_g(f) = \int_X |g(x)|^q d\mu = \|g\|_q^q$$

donc

$$\|\varphi_g\|_{L^p(X)'} \geqslant \frac{\varphi_g(f)}{\|f\|_p} \geqslant \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \|g\|_q.$$

□

**Corollaire 6.2.** *Soient $p, q \in [1, +\infty[$ deux exposants conjugués. Alors l'application*

$$\Phi : \begin{cases} L^q(X) & \to & L^p(X)' \\ g & \mapsto & \varphi_g \end{cases}$$

*est un isomorphisme ismométrique. Par conséquent, le dual de $L^p(X)$ est identifé au $L^q(X)$.*

L'application $\Phi$ n'est pas surjective pour $p = \infty$. Le dual de $L^\infty$ est en général "plus grand" que $L^1$, c'est à dire qu'il existe des formes linéaires continues sur $L^\infty$ qui ne peuvent pas être représentées sous la forme $\varphi_f$, $f \in L^1$ ; leur existence découlera de l'axiome du choix (ou du lemme de Zorn), voir la section sur le théorème de Hahn-Banach au chapitre 3.

**Théorème 6.3.** *Pour $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ es réflexif.*

*Démonstration.* Montrons d'abord l'inégalité de Clarkson suvante : Soit $2 \leqslant p < \infty$ ; on a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right) \quad \forall f, g \in L^p \tag{5}$$

Il suffit de montrer que

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}\left(|a|^p + |b|^p\right) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

On a

$$\alpha^p + \beta^p \leqslant \left(\alpha^2 + \beta^2\right)^{p/2} \quad \forall \alpha, \beta \geqslant 0$$

(se ramener au cas où $\beta = 1$ et noter que la fonction $(x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ est croissante sur $[\![0, \infty[\![$ .

Prenant $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$ et $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$ il vient

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2\right)^{p/2} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)^{p/2} \leqslant \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p.$$

Cette dernière inégalité résulte de la convexité de la fonction $x \mapsto |x|^{p/2}$ car $p \geqslant 2$.

Etape 1. Montrons que $L^p$ est uniformément convexe, et donc réflexif pour $2 \leqslant p < \infty$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$ fixé. On suppose que

$$\|f\|_p \leqslant 1, \|g\|_p \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \|f-g\|_p > \varepsilon.$$

On déduit de (5) que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \quad \text{et donc} \quad \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p < 1 - \delta$$

avec

$$\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} > 0$$

Par conséquent $L^p$ est uniformément convexe, et donc réflexif grâce au théorème 6.9 du chapitre 1 (Théorème de Milman-Pettis) [7].

Etape 2. : $L^p$ est réflexif pour $1 < p \leqslant 2$.

Soit $1 < p \leqslant 2$. On considère l'opérateur $T : L^p \to (L^q)'$ défini comme suit : Soit $u \in L^p$ fixé ; l'application $f \in L^q \mapsto \int uf$ est une forme linéaire et continue sur $L^q$ notée $Tu$ de sorte que

$$\langle Tu, f\rangle = \int uf \quad \forall f \in L^q$$

7. Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif

On a (d'après l'inégalité de Hölder)

$$|\langle Tu, f\rangle| \leqslant \|u\|_p \|f\|_q$$

et par suite

$$\| Tu\|_{(L^q)'} \leqslant \|u\|_p$$

D'autre part, posons

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2}u(x) \quad (f_0(x) = 0 \text{ si } u(x) = 0)$$

On a $f_0 \in L^q$, $\|f_0\|_q = \|u\|_p^{p-1}$ et $\langle Tu, f_0\rangle = \|u\|_p^p$. Donc

$$\|Tu\|_{(L^q)'} \geqslant \frac{\langle Tu, f_0\rangle}{\|f_0\|} = \|u\|_p$$

On obtient donc $\|Tu\|_{(L^q)'} = \|u\|_p$. Il en résulte que $T$ est une isométrie de $L^p$ sur un sous-espace fermé (puisque $L^p$ est complet) de ( $(L^q)'$. Or $L^q$ est un Banach réflexif ( $2^e$ étape) et donc (Proposition 1.6.4 du chapitre 1) $(L^p)'$ est réflexif. Il s'en suit (Proposition 1.6.3 du chapitre 1) que le sous-espace fermé $T\,(L^p)$ est réflexif et donc $L^p$ aussi.

□

**Remarque 6.4.** Les espaces $L^1$ et $L^\infty$ ne sont pas réflexifs. Laissé en exercice.

## 7. Convolution

Rappelons d'abord le théorème de Fubini-Tonelli.

**Théorème 7.1.** *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés tels que les deux mesures soient $\sigma$-finies*[8] *et soit $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ l'espace mesurable produit muni de la mesure produit. Si $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ est une application $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-mesurable, alors les applications*

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y) \ \textit{et} \quad y \mapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$$

*sont respectivement $\mathcal{A}$ - et $\mathcal{B}$-mesurables et*

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y).$$

*Cette valeur commune est l'integrale*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y)$$

*Démonstration.* Voir Briane & Pagès, page 237. □

8. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que la mesure $\mu$ est $\sigma$-finie lorsqu'il existe un recouvrement dénombrable de $X$ par des sous-ensembles de mesure finie, c'est-à-dire lorsqu'il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$, tous de mesure finie, avec $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mesurables. On définit le produit de convolution de $f$ et $g$ par

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

**Lemme 7.2.** (1) *L'ensemble* $\{x, \quad y \to |f(y)g(x-y)|$ *intégrable* $\}$ *est un borélien.*

(2) *Si* $f \star g(x)$ *est défini (c'est-à-dire que* $x$ *appartient à l'ensemble ci-dessus),* $g \star f(x)$ *l'est aussi, et on a* $f \star g(x) = g \star f(x)$.

*Démonstration.* (1) Comme la fonction $(x, y) \to f(x-y)g(y)$ est mesurable, d'après théorème de Fubini-Tonelli

$$\varphi : x \to \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy$$

est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$. En particulier,

$$\{x, \quad y \to |f(y)g(x-y)| \text{ intégrable } \} = \varphi^{-1}([0, +\infty[)$$

est un borélien de $\mathbb{R}^d$.

(2) Par changement de variable, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy < +\infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|dy < +\infty.$$

Donc $g \star f(x)$ bien défini. On peut alors faire le même changement de variable sans les valeurs absolues, ce qui donne bien $f \star g(x) = g \star f(x)$. $\square$

On va maintenant identifier des conditions sur $f$ et $g$ sous lesquelles $f \star g$ est défini presque partout.

**Théorème 7.3** ($L^1 \star L^1$). *Si* $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ *et* $g \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, *alors* $f \star g$ *est définie presque partout et* $f \star g \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, *avec*

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

*Démonstration.* On utilise encore le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dydx &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|dx|g(y)|dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x')| \, dx'|g(y)|dy = \|f\|_1 \|g\|_1\end{aligned}$$

On en déduit que $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy$ est fini pour presque tout $x$, ce qui signifie que $f \star g$ est définie presque partout. De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dydx = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

où la dernière égalité découle du calcul précédent. $\square$

**Théorème 7.4** (Théorème de Young)**.** *Soit $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Si $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $g \in L^q\left(\mathbb{R}^d\right)$, alors $f \star g$ est définie presque partout, $f \star g \in L^r\left(\mathbb{R}^d\right)$, et*

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

*En particulier,*
*$p = 1, q = r : L^1 \star L^p \subset L^p$.*
*$r = \infty : L^p \star L^q \subset L^\infty$.*

*Démonstration.* On se limite au cas où $p, q, r \in ]1, +\infty[$ (les cas limites sont plus simples). On va appliquer une inégalité de Hölder à trois termes (qui se montre de manière analogue à l'inégalité de Hölder usuelle) : si $f_1 \in L^{p_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $f_2 \in L^{p_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $f_3 \in L^{p_3}\left(\mathbb{R}^d\right)$, avec

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$$

alors $f_1 f_2 f_3 \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, et

$$\|f_1 f_2 f_3\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3}$$

On pose ici $p_1 = r$, $p_2 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)^{-1}$, $p_3 = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^{-1}$. On écrit pour $x$ fixé,

$$|f(x-y)g(y)| = f_((y)1 f_2(y) f_3(y)$$

avec

$$f_1(y) := |f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}}, \quad f_2(y) := |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}}, \quad f_3(y) := |g(y)|^{\frac{r-q}{r}}.$$

L'inégalité de Hölder aboutit à

$$\begin{aligned}
|f \star g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}})^r dy\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}})^{\frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}} dy\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|g(y)|^{\frac{r-q}{r}})^{\frac{1}{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}} dy\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_{L^q}^{1-\frac{q}{r}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f \star g(x)|^r dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \, \|f\|_{L^p}^{r-p} \|g\|_{L^q}^{r-q} \\
&\leq \|f\|_{L^p}^{r-p} \|g\|_{L^q}^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy\right) dx \\
&\leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \|f\|_p^p \|g\|_q^q \\
&= \|f\|_p^r \|g\|_q^r
\end{aligned}$$

autrement dit

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

□

**Théorème 7.5.** *Soient* $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ *et* $g \in L^q\left(\mathbb{R}^d\right)$, *avec* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Alors*

(*a*) $f \star g$ *défini pour tout* $x$, *et* $|f \star g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

(*b*) $f \star g$ *est uniformément continue.*

(*c*) *Si* $1<p<\infty, f \star g(x) \to 0$ *quand* $|x| \to +\infty$.

*Démonstration.* (a) Découle du théorème précédent.

(b) Quitte à inverser les rôles de $f$ et $g$, on peut supposer $p<\infty$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
|f \star g(x+h)-f \star g(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}(f(x+h-y)-f(x-y)) g(y) dy\right| \\
&\leq\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+h-y)-f(x-y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\|g\|_q \\
&=\left\|\tau_h f-f\right\|_p\|g\|_q
\end{aligned}$$

avec $\tau_h f(x):=f(x+h)$. Pour la dérnière égalité, on a utilisé le changement de variable $y'=x-y$. Par la continuité des translations, voir Proposition 4.7, on conclut à l'uniforme continuité.

(c) On remarque que si $f, g \in \mathscr{C}_c\left(\mathbb{R}^d\right)$, alors $f \star g \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$, en particulier tend vers zéro quand $|x| \to+\infty$. Le cas général se déduit de la densité de $\mathscr{C}_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ dans $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ et dans $L^q\left(\mathbb{R}^d\right)$. □

**Définition 7.6.** *(Approximation de l'unité) Une* **approximation de l'unité** *est une suite* $\left(\rho_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *de fonctions de* $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ *telles que*

1. $\forall n, \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(x) dx=1$.
2. $\forall n, \rho_n \geq 0$ *presque partout.*
3. $\forall \eta>0, \lim_{n \to+\infty} \int_{\{|y|>\eta\}} \rho_n(y) dy=0$.

**Exemple 7.7.** Soit $\rho \in C_c^{\infty}\left(\mathbb{R}^d\right), \rho \geq 0, \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx=1$. Alors

$$\rho_n(x):=n^d \rho(n x)$$

définit une approximation de l'unité.

**Remarque 7.8.** Si $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$, alors comme $\rho_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la fonction $f \star \rho_n$ est uniformément continue.

**Théorème 7.9.** *Si* $f$ *est bornée et continue en tout point d'un compact* $K$ *de* $\mathbb{R}^d$ (*resp. si* $f$ *est bornée et uniformément continue sur* $\mathbb{R}^d$), *alors*

$$f \star \rho_n \xrightarrow[n \to+\infty]{} f \quad \textit{uniformément sur } K, \ (\textit{resp. sur } \mathbb{R}^d)$$

*Démonstration.* On se limite au deuxième cas. Soit $f$ bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $\eta$ tel que

$$\left|x-x'\right| \leq \eta \Rightarrow\left|f(x)-f\left(x'\right)\right| \leq \varepsilon$$

On a par les propriétés 1. et 2. de l'approximation de l'unité :

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f \star \rho_n(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\rho_n(y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\rho_n(y)dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x-y)|\rho_n(y)dy \\
&= \underbrace{\int_{\{|y|\leq \eta\}} |f(x) - f(x-y)|\rho_n(y)dy}_{=I_{n,\eta}} + \underbrace{\int_{\{|y|\geq \eta\}} |f(x) - f(x-y)|\rho_n(y)dy}_{=J_{n,\eta}}
\end{aligned}
$$

Pour le premier terme, on utilise l'uniforme continuité de $f$ : pour tout $n$,

$$
I_{n,\eta} \leq \varepsilon \int_{\{|y|\leq \eta\}} \rho_n(y)dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y)dy = \varepsilon
$$

Pour le second terme, on écrit,

$$
J_{n,\eta} \leq 2\|f\|_{L^\infty} \int_{\{|y|\geq \eta\}} \rho_n(y)dy \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
$$

où on a utilisé la propriété 3. de l'approximation de l'unité. □

En adaptant la preuve ci-dessus (en remplaçant l'uniforme continuité de $f$ par la continuité des translations dans $L^p, p$ fini) on peut montrer :

**Théorème 7.10.** *Soit $1 \leq p < \infty$. Alors pour tout $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a $\rho_n \star f \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

On termine ce chapitre par ce tableau récapitulatif suivant

| | Réflexif | Séparable | Espace dual |
|---|---|---|---|
| $L^p \quad (1 < p < \infty)$ | oui | oui | $L^q \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ |
| $L^1$ | non | oui | $L^\infty$ |
| $L^\infty$ | non | non | contient strictement $L^1$ |

*URL*: `http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Analyse-M1/`