CHAPITRE 1
ESPACES VECTORIELS NORMÉS ET ESPACES DE BANACH

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E, F sont des $\mathbb{K}$-ev.

1. Espaces vectoriels normés

Définition 1.1. *Une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie trois propriétés :*
(1) *caractère défini : $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;*
(2) *homogénéité : Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;*
(3) *inégalité triangulaire : Pour tous $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*
On dit alors que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (evn).

Exemple 1.2. (1) $\mathbb{K}^d$, muni de la norme $\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p\right)^{1/p}$, $p \in [1, +\infty[$.
(2) $\mathbb{K}^d$ muni de la norme $\|x\|_\infty := \sup_{1\leq i\leq d} |x_i|$.
(3) $\mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|P\|_1 := \int_0^1 |P(t)|dt$.
(4) $\mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|P\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.
(5) $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, muni de la norme $\|A\| := \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)} = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^2$.
(6) L'espace $\mathscr{C}_b(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur un espace metrique X, numi de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, $d(x, y) := \|x - y\|$ est une distance sur E, qui fait de (E, d) un espace metrique. Rappelons qu'une distance sur un espace vectoriel est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^d$ vérifiant :
(1) symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in E$;
(2) séparation : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(3) inégalité triangulaire : $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ pour tout $x, y, z \in E$.

Définition 1.3. *Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont dites équivalentes, ce que l'on note $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que*

$$\forall x \in E, \quad \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1.$$

Remarque 1.4. La notion de normes équivalentes définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes. Concrètement :
(1) réflexivité : toute norme $\|\cdot\|$ sur E vérifie $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$;
(3) symétrie : Si $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ alors $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_1$;

Date: 10 décembre 2024 • http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Analyse-M1/.

(2) transitivité : Si $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ et si $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3$, alors $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$.

Nous verrons plus loin que si E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes. Cela est faux en dimension infinie. Par exemple, sur $E = \mathbb{R}[X]$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$, ci-dessus, ne sont pas équivalentes. En effet, si on a pour un $\beta > 0$,

$$\|P\|_\infty \leq \beta \|P\|_1, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$$

en testant cette inégalité avec $P(t) = P_n(t) := t^n$, on aboutit à

$$1 \leq \beta \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ce qui est absurde, en faisant tendre n vers $+\infty$.

Proposition 1.5. *Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes ouverts (un ouvert pour $\|\cdot\|_1$ est un ouvert pour $\|\cdot\|_2$ et réciproquement).*

Démonstration. Supposons les normes équivalentes. Par symétrie, il suffit de vérifier que tout ouvert de $(E, \|\cdot\|_1)$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_2)$.

Soit U un ouvert de $(E, \|\cdot\|_1)$, et $x \in U$. Il existe $r_1 > 0$ tel que $B_1(x, r_1) := \{y, \|y - x\|_1 < r_1\} \subset U$. Mais si $\|\cdot\|_1 \leq \beta \|\cdot\|_2$, et $r_2 := \frac{r_1}{\beta}$, on vérifie immédiatement que $B_2(x, r_2) := \{y, \|y - x\|_2 < r_2\} \subset B_1(x, r_1) \subset U$. Cela montre que U est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_2)$.

Réciproquement, supposons que les normes définissent les mêmes ouverts. Alors, $U := \{x, \|x\|_1 < 1\}$ étant un ouvert de $(E, \|\cdot\|_1)$ et un ouvert de $(E, \|\cdot\|_2)$. En particulier, comme $0 \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B_2(0, r) := \{x, \|x\|_2 < r\} \subset U = B_1(0, 1)$. Autrement dit, on a pour tout $x \in E$, $\|x\|_2 < r \Rightarrow \|x\|_1 < 1$. Soit maintenant $y \in E \backslash \{0\}$. Alors $x := \frac{ry}{2\|y\|_2}$ vérifie $\|x\|_2 = \frac{r}{2} < r$, et donc $\|x\|_1 < 1$. D'où

$$\frac{r}{2\|y\|_2}\|y\|_1 = \left\| r \frac{y}{2\|y\|_2} \right\|_1 < 1.$$

On a ainsi, en posant $\beta := \frac{2}{r}$, pour tout $y \in E$, $\|y\|_1 \leq \beta \|y\|_2$ (l'inégalité est évidente pour $y = 0$). En permutant les rôles de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, on trouverait une inégalité de la forme opposée. Finalement, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$. □

Définition 1.6. *Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace métrique (E, d) est dite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq N \quad \forall q \geq N \quad d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

ce qui équivaut à [1]

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall q \geq N \quad d(x_N, x_q) < \varepsilon$$

Définition 1.7 (Convergence normale)**.** *Une série $\sum x_n$ d'éléments d'un evn E est dite normalement convergente si la série de réels positifs $\sum \|x_n\|$ est convergente.*

Définition 1.8 (Espace de Banach)**.** *Un evn E est un espace de Banach s'il est complet (pour la distance naturellement associée à sa norme).*

1. ceci est aussi équivalent à dire que $\lim_{p,q \to \infty} d(x_p, x_q) = 0$

Exemple 1.9. (1) Soit $1 \leq p \leq +\infty$, alors $E = \mathbb{K}^d$ muni de $\|\cdot\|_p$ est un evn complet. En effet, si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E, pour tout $1 \leq i \leq d$, l'inégalité

$$|x_i^p - x_i^q| \leq \|x^p - x^q\|_p$$

montre que la suite $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Or $\mathbb{K}$ est complet. On rappelle que c'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass : on utilise qu'une suite de Cauchy est bornée, qu'elle admet alors une valeur d'adhérence par le théorème Bolzano-Weierstrass, et finalement qu'une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge. Ainsi, les suites des coordonnées convergent, ce qui permet de conclure que la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donc que E est complet.

(2) Si X est un espace métrique compact, et F est un espace de Banach, l'espace $C_b(X,F)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach (Si Y est complet, l'espace $C_b(X,Y)$ est complet).

(3) On verra plus loin d'autres exemples d'espaces de Banach, notamment les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$ et $L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Proposition 1.10. *Dans un espace de Banach, toute série normalement convergente est convergente.*

Démonstration. Soit E un espace de Banach et $\sum x_n$ une série d'éléments de E normalement convergente. Pour montrer que $\sum x_n$ est convergente, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} x_k, n \in \mathbb{N}$, est de Cauchy. Or par inégalité triangulaire, pour tous $p < q$,

$$\|S_q - S_p\| = \left\|\sum_{k=p}^{q-1} x_k\right\| \leq \sum_{k=p}^{q-1} \|x_k\| = |T_p - T_q| \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$$

où $T_n := \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k\|$, une suite réelle de Cauchy (car convergente). □

Remarque 1.11. On peut même montrer qu'un evn est de Banach si et seulement si toute série normalement convergente d'éléments de E est convergente.

2. Espaces vectoriels normés en dimension finie

Les espaces vectoriels normés de dimension finie ont un certain nombre de propriétés remarquables, dont plusieurs ont été vues en Licence. Présentons-les ici à nouveau rapidement. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, on dispose de plusieurs normes : pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ on pose

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots |x_n|)\,;$$
$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|\,;$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Ces normes sont équivalentes : on a $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$. En fait toutes les normes de $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes. Le point clef est que les boules et les sphères de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont compactes.

Théorème 2.1 (Equivalence des normes)**.** *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $d = \dim E$, et $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E. Par la Remarque 1.4, il suffit de montrer que toute norme $\|\cdot\|$ sur E est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$, définie par analogie avec $\mathbb{R}^d$ par

$$\|x\|_\infty := \sup_{1\le k\le d} |x_k|\,, \qquad \text{avec } x = \sum_{i=1}^{d} x_k e_k$$

(cette norme dépend bien sûr du choix de la base). Clairement, par l'inégalité triangulaire, pour tout $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{d} |x_i|\,\|e_i\| \le \beta\|x\|_\infty, \qquad \text{où on a posé } \beta := \max_{1\le i\le d} \|e_i\|\,.$$

Reste à montrer l'inégalité inverse. Pour cela, nous allons d'abord montrer que l'ensemble $S := \{x \in E,\ \|x\|_\infty = 1\}$ est un compact en utilisant le critère des suites.

Soit $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de S. On a en particulier que pour tout $1 \le i \le d$, pour tout n, $|x_i^n| \le 1$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass [2], il existe une extractrice $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_1^{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x_1 \in \mathbb{K}$. On obtient alors une suite $(x^{\varphi_1(n)})_n$ d'éléments de S pour laquelle la suite réelle $(x_1^{\varphi_1(n)})_n$ converge vers x_1. On repète le même raisonnement que ci-dessous à la suite réelle bornée $(x_2^{\varphi_1(n)})_n$. Il existe alors une extractrice $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_2^{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x_2 \in \mathbb{K}$. Par extraction successive, on obtient finalement une extractrice $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \cdots \circ \varphi_d$ telle que pour tout $1 \le i \le d$,

$$x_i^{\varphi(n)} \to x_i, \quad n \to +\infty$$

En posant $x := \sum x_i e_i$, on a facilement que $\left\|x^{\varphi(n)} - x\right\|_\infty \to 0$. En particulier, $\|x\|_\infty = \lim_n \left\|x^{\varphi(n}\right\|_\infty = 1$. Ainsi S est compact.

Pour conclure, on introduit l'application

$$N : (S, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}_+, \quad x \to \|x\|$$

(c'est la restriction de $\|\cdot\|$ à l'ensemble S). Par l'inégalité vue ci-dessus :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| \le \beta\|x\|_\infty,$$

on a facilement que N est continue. Comme S est compact, N atteint son inf : autrement dit, il existe $x_0 \in S$ tel que

$$\|x\|_\infty = 1 \quad \Rightarrow \|x\| \ge \|x_0\|$$

Soit $\alpha := \|x_0\| > 0$. Soit $x \in E, x \ne 0$. On pose $y := \frac{x}{\|x\|_\infty}$. On a alors $\|y\|_\infty = 1$, et donc $\|y\| \ge \alpha$. En revenant à x, on trouve $\|x\| \ge \alpha\|x\|_\infty$.

□

Remarque 2.2. (1) Il existe une autre démonstration (plus façile) utilisant les fonctions linéaires continues en dimension finie.

(2) On a vu que deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes ouverts. Ainsi, le théorème précédent montre qu'en dimension finie, toute notion topologique (c'est-à-dire reliée à la notion d'ouvert) sera indépendante du choix de la norme.

Proposition 2.3. *Un evn de dimension finie est complet.*

2. Toute suite réelle bornée contient une sous-suite convergente

Démonstration. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie avec $d = \dim E$, et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de E. On introduit

$$\|x\|_\infty := \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i| \,, \qquad \text{avec } x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$$

Par le Théorème 2.1, les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. On en déduit facilement qu'une suite est de Cauchy, resp. converge, pour la distance associée à $\|\cdot\|$ si et seulement si elle est de Cauchy, resp. converge, pour la distance associée à $\|\cdot\|_\infty$. Ainsi, il suffit de montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet. La preuve est alors analogue à ce qui a été vu pour $\mathbb{K}^n$ dans l'exemple 1.9. On montre que si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E, pour tout $1 \leq i \leq d$, la suite $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, et donc converge vers un certain x_i. On en déduit que $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$. □

Proposition 2.4. *Dans un evn de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées bornées.*

Démonstration. On introduit comme dans la preuve précédente la norme $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq d} |x_i|$, pour $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$. Par équivalence des normes, il suffit de montrer que dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, les parties compactes sont exactement les parties fermées bornées, (voir la Remarque 2.2). On le montre alors comme dans $\left(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty\right)$, grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass. □

Proposition 2.5. *Soit E un evn. Tout sev de dimension finie de E est fermé.*

Démonstration. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, et F un sev de E de dimension finie. Par la Proposition 2.3 $(F, \|\cdot\|)$ est complet. Soit maintenant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge vers x dans E. On vérifie immédiatement que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, et donc par complétude de F, elle converge dans F. Cela montre que F est fermé dans E. □

Théorème 2.6. *(Théorème de Riesz) Soit E un espace vectoriel normé.*
La boule unité fermée est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Démonstration. Si E est de dimension finie, la boule unité fermée de E étant fermée et bornée, elle est compacte (voir Proposition 2.4).

Réciproquement, supposons par l'absurde que E de dimension infinie. Soit $B := \bar{B}_f(0,1) = \{x \in E \;:\; \|x\| \leq 1\}$ la boule unité férmée de E et considérons, pour tout $x \in B$, l'ouvert $B_x = \{y \in B \;:\; \|y - x\| < \frac{1}{2}\}$. On a alors le recouvrement $B \subset \cup_{x\in B} B_x$. Comme B est compact, d'après la propriété de Borel-Lebesgue [3], il existe $x_1, \cdots, x_n \in B$ tels que $B \subset \cup_{i=1}^{n} B_{x_i}$. On pose $F := \operatorname{Vect}(\{x_1, \ldots, x_n\})$. C'est un sous-espace vectoriel de dimension finie, donc d'après la proposition précédente, F est fermé dans E. Comme E est de dimension infinie, il existe $x \in E \backslash F$. D'où il existe $y \in F$ tel que $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F) > 0$ (si cette distance est nulle, $x \in \bar{F} = F$, ce qui est impossible). Posons alors $x_0 := \frac{x-y}{\|x-y\|}$. On a $\|x_0\| = 1$, donc $x_0 \in B$. Pour $z \in F$, on

3. de tout recouvrement de B par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

a

$$\begin{aligned}\|x_0 - z\| &= \left\| \frac{x-y}{\|x-y\|} - z \right\| \\ &= \frac{1}{\|x-y\|} \|x - (y - \|x-y\|z)\| \\ &\geq \frac{\operatorname{dist}(x,F)}{\|x-y\|} = 1\end{aligned}$$

Ainsi, $\|x_0 - z\| \geq 1$, pour tout $z \in F$. En particulier $\|x_0 - x_i\| \geq 1$, pour tout $1 \leq i \leq n$. On en déduit que $x_0 \notin \cup_{i=1}^n B_{x_i}$. Or $B \subset \cup_{i=1}^n B_{x_i}$, donc $x_0 \notin B$, ce qui est une contradiction. L'hypothèse de départ, à savoir E de dimension infinie, est fausse. L'espace E est donc bien de dimension finie.

□

3. Les espaces ℓ^p

Pour une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $p \in [1, +\infty]$, on définit $\|u\|_p \in [0, +\infty]$ par

$$\|u\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p\right)^{1/p} & \text{si } p < +\infty \\ \sup\{|u_n|\,;\, n \in \mathbb{N}\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $\ell^p(\mathbb{N};\mathbb{K})$ (ou simplement $\ell^p(\mathbb{N})$) le sous-ensemble de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ formé des suites u telles que $\|u\|_p \neq +\infty$. Ainsi,

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) := \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty \right\}$$

est l'ensemble des suites bornées, et

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty \right\}$$

est l'ensemble des suites (u_n) telles que la série de terme général $(|u_n|^p)$ soit convergente. En particulier $\ell^1(\mathbb{N})$ est l'ensemble des séries absolument convergentes.

Proposition 3.1 (ℓ^p est un espace de Banach)**.** (1) *Pour tout* $1 \leq p \leq \infty, \ell^p(\mathbb{N})$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*

(2) *Pour tout* $1 \leq p < \infty$*,*

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$$

définit une norme sur $\ell^p(\mathbb{N})$*, et*

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

définit une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$*.*

(3) *Pour tout* $1 \leq p \leq \infty, (\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. Nous nous limitons au cas p fini. Pour montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel, on applique l'inégalité de Minkowski aux sommes partielles pour montrer que pour tous $u, v \in \ell^p(\mathbb{N})$, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |u_n + v_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^{N} |v_n|^p\right)^{1/p}.$$

En faisant tendre N vers l'infini, on en déduit que $u + v \in \ell^p(\mathbb{N})$, et que $\|\cdot\|_{\ell^p}$ vérifie l'inégalité triangulaire

$$\|u + v\|_{\ell^p} \leq \|u\|_{\ell^p} + \|v\|_{\ell^p}.$$

Le caractère défini et l'homogénéité de $\|\cdot\|_{\ell^p}$ sont immédiats, donc $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^p})$ est un espace vectoriel normé.

Pour la complétude, on considère $(u^j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\ell^p(\mathbb{N})$. On rappelle qu'à j fixé, $u^j = (u^j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\ell^p(\mathbb{N})$, en particulier une suite de complexes. Par définition d'une suite de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J > 0$ tel que pour tous $j, k \geq J$,

$$\left\|u^j - u^k\right\|_{\ell^p} \leq \varepsilon, \quad \text{i.e.} \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u^j_n - u^k_n\right|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

On en déduit que pour tout n fixé, et pour tous $j, k \geq J$, $\left|u^j_n - u^k_n\right| \leq \varepsilon$, c'est-a-dire $(u^j_n)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy de $\mathbb{C}$. On en déduit que c'est une suite convergente, et on note $u_n \in \mathbb{C}$ sa limite. Reste ensuite à montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\ell^p(\mathbb{N})$ et que $u^j \to u$ quand $j \to +\infty$ dans $l\ell^p(\mathbb{N})$. Pour cela, il suffit de remarquer que

$$\forall j, k \geq J, \quad \forall N, \quad \left(\sum_{n=0}^{N} \left|u^j_n - u^k_n\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u^j_n - u^k_n\right|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

En faisant tendre k vers l'infini dans la somme (finie) allant de 0 à N, on a

$$\forall j \geq J, \quad \forall N, \quad \left(\sum_{n=0}^{N} \left|u^j_n - u_n\right|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

ce qui montre par les résultats classiques sur les séries numériques que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u^j_n - u_n|^p$ converge, et que

$$\forall j \geq J, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u^j_n - u_n\right|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

Le résultat s'en suit.

□

Puisque le terme général d'une série convergente est borné, on a $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$. La proposition suivante, généralise cette inclusion.

Proposition 3.2 (Inclusion des $\ell^p(\mathbb{N})$ entre eux)**.** *Soient* $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$*. Pour tout* $u \in \ell^{p_1}(\mathbb{N})$ *on a*

$$\|u\|_{p_2} \leq \|u\|_{p_1}$$

Par conséquent

$$\ell^{p_1}(\mathbb{N}) \subset \ell^{p_2}(\mathbb{N})$$

Démonstration. On montre directement l'inégalité. On considère le cas $p_2 < \infty$ pour alléger les notations, mais le cas $p_2 = \infty$ peut se traiter de la même façon.

Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes ≥ 0 telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1$. On a en particulier $v_n \leq 1$ pour tout n, et donc pour tout $p \geq 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^p \leq \sum v_n = 1$. Soit maintenant $u \in \ell^{p_1}(\mathbb{N})$. Si $u = 0$, l'inégalité est immédiate. Sinon, on applique le résultat précédent à

$$p := \frac{p_2}{p_1}, \quad v_n := \frac{|u_n|^{p_1}}{\|u\|_{p_1}^{p_1}}$$

On trouve $\sum v_n^p \leq 1$, ce qui s'écrit $\|u\|_{p_2} \leq \|u\|_{p_1}$. □

Proposition 3.3 (Dualité ℓ^p - ℓ^q)**.** *Si $E = \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}), 1 \leq p < \infty$, alors son dual $(\ell^p)' = \ell^q$ où q est son exposant conjugué i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Plus précisement, ℓ^q est isométriquement isomorphe à $(\ell^p)'$ par l'isométrie suivante : $T : \ell^q \to (\ell^p)'$, définie par : pour $b = (b_n)_n \in \ell^q$, l'application $T((b)) : \ell^p \to \mathbb{K}$ est définie par : pour tout $a = (a_n)_n \in \ell^p, T(b)(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

D'où $(\ell^p)'' = \ell^p$, pour tout $p \in]\!]\, 1, +\infty[$.

Démonstration. Supposons $1 < p < \infty$ et q sont conjugué.

Démonstration : On commence par montrer que T est bien définie. Si on fixe $b = (b_n)_n \in \ell^q$ alors, l'inégalité de Hölder nous donne

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n\right| \leq \|a\|_p \|b\|_q < \infty \tag{1}$$

pour tout $a = (\alpha_n)_n \in \ell^p$. D'où $(T(b))(a)$ converge et donc $T(b) : \ell^p \to \mathbb{K}$ est bien définie. Il est facile de vérifier qu'elle est linéaire.

De l'inégalité (**??**), on déduit que $T(b)$ est continue et $\|T(b)\| \leq \|b\|_q$. D'où $T(b)$ est un élément du dual de ℓ^p et $\|T(b)\|_{(\ell)'} \leq \|b\|_q$.

On va montrer que $\|T(b)\| \geq \|b\|_q$. Si $b = 0$ il n'y a rien à faire. On suppose que $b \neq 0$ et on pose

$$a_n = \begin{cases} \frac{|b_n|^q}{b_n} & \text{si } b_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } b_n = 0 \end{cases}$$

Alors $a = (a_n)_n \in \ell^p$ et

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^{qp-p}\right)^{1/p} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^q\right)^{1/p} = \|b\|_q^{q/p}$$

car $(q-1)p = q$. On a $T(b)(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^q = \|b\|_q^q$. D'où $'$

$$\|T(b)\|_{(\ell^p)'} \geq \frac{|T(b)(a)|}{\|a\|_p} = \frac{\|b\|_q^q}{\|b\|_q^{q/p}} = \|b\|_q^{q-q/p} = \|b\|_q$$

Ainsi $\|T(b)\|_{(\ell^p)'} = \|b\|_q$, pour tout $b \in \ell^q$, donc T est une isométrie linéaire. On va montrer que T est surjective. Soit $f \in (\ell^p)'$, non nul. On définit $b = (b_n)_n$ par $b_n = f(e_n)$ où e_n est le nième élément de la suite canonique i.e. $e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$, la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui en nième position qui vaut 1 . On va montrer que $b \in \ell^q$ et que $T(b) = f$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit une suite à support fini, $x^{(m)} = (a_n)_n$ telle que

$$a_n = \begin{cases} \frac{|b_n|^q}{b_n} & \text{si } b_n \neq 0 \text{ et } 0 \leq n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m \text{ ou } b_n = 0 \end{cases}$$

Alors

$$\left\| x^{(m)} \right\|_p = \left(\sum_{n=0}^{m} |b_n|^{|q} \right)^{1/p}$$

et

$$f\left(x^{(m)}\right) = \sum_{n=0}^{m} a_n b_n = \sum_{n=0}^{m} |b_n|^q$$

d'où

$$\|f\|_{(\ell^p)'} \geq \frac{\left|f\left(x^{(m)}\right)\right|}{\left\|x^{(m)}\right\|_p} = \frac{\sum_{n=0}^{m} |b_n|^q}{\left(\sum_{n=0}^{m} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{n=0}^{m} |b_n|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=0}^{m} |b_n|^q \right)^{1/q}$$

Lorsqu'on fait tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $\|b\|_q \leq \|f\|_{(\ell^p)'}$, donc $b \in \ell^q$ et $T(b) = f$.

Supposons maintenant $p = 1$

Montrons que si $E = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, alors son dual $(\ell^1)' = \ell^\infty$. Plus précisement, ℓ^∞ est isométriquement isomorphe à $(\ell^1)'$ par l'isométrie : $T : \ell^\infty \to (\ell^1)'$, définie par : pour $b = (b_n)_n \in \ell^\infty$, l'application $T((b)) : \ell^1 \to \mathbb{K}$ est définie par : pour tout $a = (a_n)_n \in \ell^1, T(b)(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

T est bien définie car pour tout $a \in \ell^1$ et $b \in \ell^\infty$ $\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n\right| \leq \|b\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leq \|a\|_1 \|b\|_\infty < \infty$ D'où $T(b)$ est un élément du dual de ℓ^1 et $\|T(b)\|_{(\ell^1)'} \leq \|b\|_\infty$.

Soit n_0 tel que $b_{n_0} \neq 0$ on pose $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $a_n = |b_n| / b_n$ pour $n = n_0$ et $a_n = 0$ sinon. Alors $\|a\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = |a_{n_0}| = 1$ et $|T(b)(a)| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n\right| = |a_{n_0} b_{n_0}| = |b_{n_0}|$. d'où $\|T(b)\|_{(\ell^1)'} \geq \frac{|T(b)(a)|}{\|a\|_1} = \frac{\left|b_{n_0}\right|}{1} = |b_{n_0}|$, et ceci est vrai pour tout n_0 avec $b_{n_0} \neq 0$. Ainsi

$$\|T(b)\|_{(\ell^1)'} \geq \sup_{n_0, b_{n_0} \neq 0} |b_{n_0}| = \sup_n |b_n| = \|b\|_\infty$$

On a $\|T(b)\|_{(\ell^1)'} = \|b\|_\infty$, pour tout $b \in \ell^\infty$, donc T est une isométrie linéaire. On va montrer que T est surjective. Soit $f \in (\ell^1)'$, non nul. On définit $b = (b_n)_n$ par $b_n = f(e_n)$. Comme $\|e_n\|_1 = 1$

$$|b_n| = |f(e_n)| \leq \|f\|_{(\ell^1)'} \|e_n\|_1 = \|f\|_{(\ell^1)'}$$

Alors $\|b\|_\infty = \sup_n |b_n| \leq \|f\|_{(\ell^1)'}$ d'où $b \in \ell^\infty$ et $f = T(b)$. □

4. Applications linéaires continues

Théorème 4.1 (Caractérisation des applications linéaires continues). *Soient E, F deux evn, et $f : E \to F$ une application linéaire. On a équivalence entre les propriétés suivantes :*

(1) *f est continue en 0 ;*
(2) *f est continue ;*
(3) *f est uniformément continue ;*
(4) *f est lipschitzienne ;*
(5) *Il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. On a clairement (5) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). Il suffit donc de montrer que (1) $\Rightarrow$ (5). Supposons donc f continue en 0 . En prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition classique de la continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $\|y\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(y)\|_F \leq 1$. Soit maintenant $x \in E, x \neq 0$. On peut poser $y := \delta \frac{x}{\|x\|_E}$. On a alors $\|y\|_E = \delta$, et donc $\|f(y)\|_F \leq 1$. En revenant à x, en utilisant la linéarité de f, on trouve

$$\frac{\delta}{\|x\|_E}\|f(x)\|_Y \leq 1, \qquad \text{c'est-à-dire } \|f(x)\|_Y \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_E$$

En posant $M := \frac{1}{\delta}$, on retrouve (5) (l'inégalité dans le cas $x = 0$ est triviale). □

Définition 4.2. *Pour E, F deux evn, on notera $\mathscr{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.*

Définition 4.3 (Formes linéaires continues, dual topologique)**.** *Les éléments de $\mathscr{L}_c(E, \mathbb{K})$ sont appelés formes linéaires continues sur E, et $\mathscr{L}_c(E, \mathbb{K})$, noté E', est appelé* **dual topologique** *de E.*

Proposition 4.4. *Soit E un evn de dimension finie, F un evn. Toute application linéaire de $f : E \to F$ est continue.*

Démonstration. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn, soit $d = \dim E$, et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de E. On introduit

$$\|x\|_\infty := \sup_{1\leq i\leq d} |x_i|\,, \qquad \text{avec } x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$$

Comme $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur E, il suffit de montrer que f est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

Or pour tout $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$, on a

$$\|f(x)\|_F = \left\| f\left(\sum_i x_i e_i\right)\right\|_F \leq \sum_i |x_i|\, \|f(e_i)\|_F \leq M\|x\|_\infty,$$

avec $M := \max_{1\leq i\leq d} \|f(e_i)\|_F$

On retrouve bien la caractérisation (5) de la continuité de f du Théorème 4.1. □

Exemple 4.5 (Contre-exemple si E est de dimension infinie)**.** *On considère $E = \mathbb{R}[X]$, muni de $\|P\| = \int_0^1 |P(t)|dt$. Soit $f : E \to \mathbb{R}, P \to P(1)$. Clairement, f est linéaire. Montrons que f n'est pas continue. Dans le cas contraire, on aurait l'existence d'un $M > 0$ tel que pour tout $P \in E, |f(P)| \leq M\|P\|_1$, c'est-à-dire :*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad |P(1)| \leq M \int_0^1 |P(t)|dt.$$

En prenant $P(t) = P_n(t) = t^n$, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{M}{n+1}$, ce qui es absurde.

Proposition 4.6 (Norme d'application linéaire, norme subordonnée)**.** *L'application $f \mapsto \|f\|_{\mathscr{L}_c(E,F)}$ définie pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$ par*

$$\|f\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} := \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$$

définit une norme sur $\mathscr{L}_c(E, F)$, on l'appelle **norme d'opérateur** *ou* **norme subordonnée**. *On la note parfois par $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$. On a de plus les propriétés suivantes :*

(1)
$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{L}(_cE,F)} &= \sup\{\|f(x)\|_F\ : x \in B_E(0,1)\} \\ &= \sup\{\|f(x)\|_F\ : x \in \bar{B}_E(0,1)\} \\ &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \end{aligned}$$

(2) *Pour tout* $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$ *et pour tout* $x \in E$,
$$\|f(x)\|_F \leq \|f\|_{\mathscr{L}_c(E,F)}\|x\|_E$$

(3) *Pour tout* $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$, *pour tout* $g \in \mathscr{L}_c(F,G)$,
$$\|g \circ f\|_{\mathscr{L}(E,G)} \leq \|g\|_{\mathscr{L}(_cF,G)}\|f\|_{\mathscr{L}_c(E,F)}$$

Théorème 4.7. *Soit* E *un evn et* F *est un espace de Banach. L'espace* $\mathscr{L}_c(E,F)$, *muni de* $\|\cdot\|_{\mathscr{L}_c(E,F)}$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}_c(E,F)$. On a
$$\lim_{p,q\to+\infty} \|f_p - f_q\|_{\mathscr{L}(_cE,F)} = 0$$
Pour tout $x \in E$, par la proposition précédente
$$\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \|f_p - f_q\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \|x\|_E \tag{2}$$
ce qui montre que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F. Comme F est complet, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F. On appelle $f(x)$ sa limite. Il reste à montrer que $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$, et que $\|f_n - f\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \to 0$ quand $n \to +\infty$. En passant à la limite, pour $x, y \in E$ et $\lambda \in K$ fixés, dans la relation :
$$f_n(x + \lambda y) = f_n(x) + \lambda f_n(y)$$
on trouve
$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$
ce qui montre la linéarité de f. Par ailleurs, en passant à la limite, pour x fixé, dans la relation
$$\|f_n(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \qquad \text{avec} \qquad M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}$$
on trouve
$$\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$$
ce qui montre que $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$. Enfin, soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tous $p, q \geq N$, $\|f_p - f_q\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \leq \varepsilon$. Par l'inégalité (2), on a pour tout x fixé et pour tous $p, q \geq N$,
$$\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E$$
En prenant $p = n$, et en envoyant q à l'infini, on trouve pour tout $n \geq N$.
$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E$$
En particulier, x étant arbitraire, on en déduit
$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|f_n(x) - f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \varepsilon, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \|f_n - f\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \leq \varepsilon$$
Cela montre que $\|f_n - f\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

□

Théorème 4.8 (Théorème de prolongement des applications linéaires continues)**.** *Soit F un espace de Banach, D un sev d'un evn E, dense dans E. Soit $f \in \mathscr{L}_c(D,F)$. Il existe un unique prolongement $\tilde{f} \in \mathscr{L}_c(E,F)$ de f, avec $\|\tilde{f}\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} = \|f\|_{\mathscr{L}_c(D,F)}$.*

Démonstration. Comme $f \in \mathscr{L}_c(D,F)$, elle est uniformément continue sur D. On peut appliquer le théorème de prolongement des applications uniformément continues [4], qui fournit l'existence d'un unique prolongement $\tilde{f} : E \to F$ uniformément continu. Reste à voir que $\tilde{f} \in \mathscr{L}_c(E,F)$, et que $\|\tilde{f}\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} = \|f\|_{\mathscr{L}_c(D,F)}$. Pour la linéarité, on utilise que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application

$$(x,y) \to \tilde{f}(x+\lambda y) - \tilde{f}(x) - \lambda \tilde{f}(y)$$

est continue sur $E \times E$ et nulle sur $D \times D$ (par linéarité de f). Elle est donc par densité nulle sur $E \times E$, ce qui montre la linéarité de $\tilde{f}$. Par ailleurs, soit $x \in E$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D qui converge vers x. On a pour tout n,

$$\left\|\tilde{f}\left(x_n\right)\right\|_F = \left\|f\left(x_n\right)\right\|_F \leq \|f\|_{\mathscr{L}(D,F)} \left\|x_n\right\|_E$$

En passant à la limite, on trouve

$$\|\tilde{f}(x)\|_F \leq \|f\|_{\mathscr{L}_c(D,F)} \|x\|_E$$

En divisant par $\|x\|_E$ et en prenant le sup sur les $x \neq 0$, on obtient que $\tilde{f} \in \mathscr{L}_c(E,F)$, avec $\|\tilde{f}\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \leq \|f\|_{\mathscr{L}_c(D,F)}$. L'autre inégalité étant claire, on obtient le résultat voulu. □

Théorème 4.9 (Théorème de Baire)**.** *Soit X un espace métrique complet, et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses dans X. Alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans X (une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense).*

De manière équivalente : si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide (une union de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide).

Démonstration. Voir Rudin (Analyse réelle et complexe, page 127).

□

Corollaire 4.10. *Soit X un espace métrique complet (non-vide), tel que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, avec $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fermés. Alors l'un des F_n est d'intérieur non-vide.*

Théorème 4.11. *(Théorème de Banach-Steinhaus) Soit E un Banach, F un espace vectoriel normé, et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{L}_c(E,F)$. Si pour tout x,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\|_F < \infty$$

alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} < \infty$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_n := \{x \in E, \quad \forall k, \|T_k(x)\|_F \leq n\}$$

4. Soit X et Y deux espaces metriques. On suppose $D \subset X$ dense, et Y complet. Soit $f : D \to Y$ une application uniformément continue. Alors il existe un unique prolongement continu $\tilde{f} : X \to Y$ de f. De plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue.

Il s'agit d'un fermé de E, et par l'hypothèse, $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$. Par le corollaire du théorème de Baire, il existe N tel que E_N est d'intérieur non-vide. Ainsi, il existe $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B(x_0, \varepsilon) \subset E_N$. Comme pour tout $y \in B(0,1)$, $x_0 + \frac{\varepsilon}{2} y \in B(x_0, \varepsilon)$, on a

$$\forall k, \quad \left\| T_k \left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2} y \right) \right\|_F \leq N$$

ce qui donne

$$\forall k, \quad \left\| T_k \left(\frac{\varepsilon}{2} y \right) \right\|_F \leq N + \|T_k(x_0)\|_F$$

Finalement

$$\forall k, \forall y \in B(0,1), \quad \|T_k(y)\|_F \leq \frac{2}{\varepsilon} \left(N + \|T_k(x_0)\|_F \right)$$

En prenant le sup en y, on arrive à

$$\forall k, \quad \|T_k\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \leq M, \quad M := \frac{2}{\varepsilon} \left(N + \|T_k(x_0)\|_F \right)$$

ce qui conclut la preuve. □

Corollaire 4.12. *Soit E un Banach, F un evn. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{L}_c(E,F)$ qui converge simplement vers $T : E \to F$.*
Alors $T \in \mathscr{L}_c(E,F)$, et $\|T\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathscr{L}_c(E,F)}$.

Démonstration. Comme pour tout x, $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a en particulier que pour tout x, $\sup_n \|T_n(x)\|_F < +\infty$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, $\sup_n \|T_n\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} := M < +\infty$. On en déduit que pour tout $x \in B(0,1)$.

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_F = \lim_n \|T_n(x)\|_F &= \liminf_n \|T_n(x)\|_F \leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \|x\|_E \\ &\leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} =: M' \leq M < +\infty \end{aligned}$$

En prenant le sup en $x \in B(0,1)$, on trouve bien $\|T\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \leq M'$. □

Théorème 4.13 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soient E et F deux Banach. Soit $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ surjective. Alors T est ouverte, c'est-à-dire que pour tout ouvert U de E, $T(U)$ est un ouvert de F.*

Démonstration. Soit U un ouvert, $x_0 \in U$, et $\delta > 0$ tel que $B_E(x_0, \delta) \subset U$. Il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $B_F(T(x_0), \rho) \subset T(B_E(x_0, \delta))$. Par linéarité de T, on peut se ramener à $x_0 = 0, \delta = 1$. Ainsi, il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $B_F(0,\rho) \subset T(B_E(0,1))$. On pose $B := B_E(0,1)$ et $C := \overline{T(B)}$. On va d'abord montrer qu'il existe ρ tel que $B_F(0,\rho) \subset C$. On a par surjectivité de T :

$$F = T(\cup_{n\in\mathbb{N}} nB) = \cup_{n\in\mathbb{N}} T(nB) = \cup_{n\in\mathbb{N}} nT(B) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} nC.$$

Notons que les $nC, n \in \mathbb{N}$, sont des fermés. Par le corollaire du théorème de Baire, il existe donc n_0 tel que $n_0 C$ soit d'intérieur non-vide, ce qui est équivalent à dire que C est d'intérieur non-vide. Ainsi, il existe $\rho > 0$ tel que $B_F(x_0, \rho) \subset C$. On vérifie facilement que $T(B)$ est symétrique (i.e. $x \in T(B) \Rightarrow -x \in T(B)$) et convexe. Ces propriétés étant préservées par passage à l'adhérence, C est aussi convexe et symétrique. Il contient ainsi

$$\frac{1}{2}\left(B_F(x_0,\rho) + B_F(-x_0,\rho) \right) := \left\{ \frac{1}{2}(x+y), x \in B_F(x_0,\rho), y \in B_F(-x_0,\rho) \right\}.$$

On vérifie facilement que ce dernier ensemble contient $B(0,\rho)$. Quitte à réduire ρ, on peut supposer $\overline{B_F(0,\rho)} \subset C$.

Montrons maintenant que $B_F(0,\rho/2) \subset T(B)$, avec le même ρ que précédemment. Soit $y \in B_F(0,\rho/2)$. On va construire par récurrence une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n,

$$\|z_n\|_E < 2^{-(n+1)}, \quad \|y - T(z_0 + \cdots + z_n)\|_F < \rho 2^{-(n+2)}.$$

L'initialisation se fait comme suit. On a $2y \in B_F(0,\rho) \subset C$: en particulier, il existe $x_0 \in B_E(0,1)$ tel que $\|2y - T(x_0)\|_F < \rho/2$ (on pourrait prendre n'importe quel nombre positif à la place de $\rho/2$). En posant $z_0 = \frac{x_0}{2}$, on a $\|z_0\|_E < \frac{1}{2}, \|y - T(z_0)\|_F < \frac{\rho}{4}$. Supposons maintenant avoir construit $z_0, \ldots, z_n$. On a en particulier

$$\left\|2^{n+2}y - T\left(2^{n+2}z_0 + \cdots + 2^{n+2}z_n\right)\right\|_F < \rho$$

Il existe $x_{n+1} \in B_E(0,1)$ tel que

$$\left\|2^{n+2}y - T\left(2^{n+2}z_0 + \cdots + 2^{n+2}z_n\right) - T(x_{n+1})\right\|_F < \frac{\rho}{2}.$$

En posant $z_{n+1} = 2^{-(n+2)}x_{n+1}$, on trouve le résultat voulu. La série $\sum z_k$ est normalement convergente, donc convergente car E est un Banach. Si x est sa limite, on trouve $T(x) = y$, et de plus

$$\|x\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|z_n\| < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$$

ce qui conclut la preuve. □

Corollaire 4.14 (Théorème de l'isomorphisme de Banach)**.** *Soient E et F deux Banach, $T \in \mathscr{L}_c(E,F)$ bijectif. Alors $T^{-1} \in \mathscr{L}_c(F,E)$, T est alors un isomorphisme topologique.*

Démonstration. Le fait que l'inverse d'une application linéaire bijective soit linéaire est classique. Le point clé est montrer la continuité de T^{-1}, qui découle du théorème précédent et de la caractérisation de la continuité à l'aide des préimages d'ouverts : pour tout ouvert U de E, $\left(T^{-1}\right)^{-1}(U) = T(U)$ est un ouvert de F. □

Corollaire 4.15. *Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un espace E qui le rendent complets. S'il existe $M > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq M\|\cdot\|_2$, alors les deux normes sont équivalentes.*

Démonstration. Appliquer le résultat précédent à l'application "identité" :

$$I : (E, \|\|_2) \to (E, \|\|_1), \quad x \to x$$

□

Corollaire 4.16 (Théorème du graphe fermé)**.** *Soient E, F deux Banach, et $T : E \to F$ linéaire. Alors T est continue si et seulement si son graphe $G_T := \{(x, Tx), x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.*

Démonstration. Le sens qui est toujours vrai (pour E, F métriques quelconques, et $T : E \to F$ quelconque, pas forcément linéaire) est : si T continue alors G_T est fermé.

Le point important ici est la réciproque. Supposons G_T fermé. On introduit $N_T : E \to \mathbb{R}_+$ définie par : pour tout $x \in E$, $N_T(x) = \|x\|_E + \|T(x)\|_F$. On vérifie facilement que N_T est une norme, appelée norme du graphe. Montrons que (E, N_T) est complet : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E pour N_T. On déduit immédiatement de la définition de N_T que (x_n) est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$ et que $(T(x_n))$ est de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Ces espaces étant complets, il existe $(x,y) \in E \times F$ tel que $x_n \to x, T(x_n) \to y$. Mais comme G_T est fermé et que $(x_n, T(x_n)) \in G_T$ pour tout n, $(x, y) \in G_T$, i.e. $y = T(x)$. Finalement, on a $N_T(x_n - x) \to 0$, ce qui montre que (E, N_T) est complet. On est alors dans les conditions du théorème précédent : comme $\|\cdot\|_E \leq N_T$, les deux normes sont équivalentes : il existe en particulier $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad N_T(x) = \|x\|_E + \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E,$$

d'où $\|T(x)\|_F \leq (C-1)\|x\|_E$ ce qui montre la continuité de T. □

5. Le théorème de Hahn-Banach

Le théorème de Hahn-Banach permet de d'étendre des formes linéaires continues d'un sous-espace vectoriel normé, tout en préservant la continuité.

Théorème 5.1 (Théorème de Hahn-Banach (forme analytique))**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $p : E \to \mathbb{R}$ (une semi-norme) une application telle que :*
(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+, x \in E$
(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$.
Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $f : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors il existe une forme linéaire $g : E \to \mathbb{R}$ telle que
(1) $g = f$ sur F *i.e. $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in F$.*
(2) *$g \leq p$ sur E i.e. $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. On suppose que $F \neq E$, sinon il n'y a rien à montrer.

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des paires ordonnées (F', h'), où F' est un sous-espace vectoriel contenant F et h' est une extension de f à F' telle que $h' \leq p$ sur F'. L'ordre partiel sur $\mathscr{E}$ est défini par

$$(F', h') \preccurlyeq (F'', h'') \text{ si et seulement si } F' \subset F'', \text{ et } h' = h'' \text{ sur } F'.$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ n'est pas vide, puisqu'il contient (F, f), on va montrer qu'il est inductif.

Soit $C = \{(F_i, h_i), i \in I\}$ une chaîne de $\mathscr{E}$ i.e. une partie totalement ordonnée de $\mathscr{E}$. On pose $F_C = \bigcup_{i \in I} F_i$ et $h_C : F_C \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par :

$$h_C(x) = f_i(x) \quad \text{for } x \in F_i$$

Alors, (F_C, h_C) est un majorant de C. Ainsi $(\mathscr{E}, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné inductif et en vertu du lemme de Zorn, il admet un élément maximal (F_g, g). Tout ce qui reste à vérifier pour terminer la preuve, est que $F_g = E$.

Supposons le contraire i.e. $F_g \neq E$. Soit $x_0 \in E \backslash F_g$. Soient $x, y \in F_g$, alors

$$f(x) - f(y) \leq p(x-y) \leq p(x + x_0) + p(-y - x_0)$$

d'où $-p(-y - x_0) - f(y) \leq p(x + x_0) - f(x)$. Ainsi pour tout $x \in F_g$,

$$S := \sup_{y \in F_g} \{-p(-y - x_0) - f(y)\} \leq p(x + x_0) - f(x)$$

d'où

$$S \leq \inf_{x \in F_g} \{p(x + x_0) - f(x)\} = I$$

Alors tout $a \in [S, I]$ est tel que pour tout $y \in F_g$,

$$-p(-y - x_0) - f(y) \leq a \leq p(y + x_0) - f(y) \tag{3}$$

On pose alors

$$F_{x_0} = \{x + t x_0 : x \in F_g, t \in \mathbb{R}\} = F_g \oplus \mathbb{R} x_0$$

D'où si $w \in F_{x_0}$ on a $w = x + tx_0$ et la décomposition est unique. On définit la fonction h sur F_{x_0} par

$$h(w) = f(x) + at$$

Alors h est linéaire sur F_{x_0} et est une extension de f de F à F_{x_0}. On remarque alors que

$$h(w) \leq p(w) \quad \text{ sur } F_{x_0}$$

Ceci est une conséquence directe de (3) en posant $y = \frac{x}{t}, t \neq 0$ et en considérant le cas $t > 0$ puis $t < 0$. Alors (F_{x_0}, h) est un élément de $\mathscr{E}$, tel que $(F_g, g) \preccurlyeq (F_{x_0}, h)$, ce qui est une contradiction puisque (F_g, g) est un élément maximal. □

Corollaire 5.2 (Extension par contuité). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Soit F un sous-espace vectoriel et $f : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors il existe une forme linéaire continue $g : E \to \mathbb{K}$ telle que $\|g\| = \|f\|$.*

Démonstration. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

On pose $C = \|f\|$ et $p = C\|\cdot\|$. Alors $f \leq p$ sur F et d'après le théorème de hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue $g : E \to \mathbb{R}$ telle que $g = f$ sur F et $g \leq p$ sur E. Ceci entraîne que pour tout $x \in E, g(x) \leq C\|x\|$ et $g(-x) \leq C\|-x\| = C\|x\|$ i.e. $|g(x)| \leq C\|x\|$. D'où $\|g\| \leq C = \|f\|$ et comme $|g(x)| = |f(x)|$ sur F, on aura $\|g\| \geq \|f\|$ ce qui donne finalement $\|g\| = \|f\|$.

Supposons $\mathbb{K} = \mathrm{C}$.

On écrit, $f = f_1 + if_2$, où $f_1 = \mathfrak{Re}(f)$ et $f_2 = \mathfrak{Im}(f)$. Alors f_1 et f_2 sont des formes linéaires réelles sur F considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $f_2(x) = -f_1(ix)$. D'après le cas réel, il existe une forme linéaire continue $g_1 : E \to \mathbb{R}$ telle que $g_1 = f_1$ sur F et $\|g_1\| = \|f_1\|$. On pose, pour tout $x \in E$, $g(x) = g_1(x) - ig_1(ix)$. Alors $g(x) = f(x)$ sur F, on aussi $g(ix) = ig(x)$ et comme g_1 est $\mathbb{R}$-linéaire, g est $\mathbb{C}$-linéaire sur l'espace vectoriel complexe E. Il reste à montrer que $\|g\| \leq \|f\|$, ce qui entraînera $\|g\| = \|f\|$. Soit $x \in E$ tel que $g(x) \neq 0$ et $\alpha = \arg(g(x))$, d'où

$$|g(x)| = g(x)e^{-i\alpha} = g\left(xe^{-i\alpha}\right) = g_1\left(xe^{-i\alpha}\right) = \left\|g_1\left(xe^{-i\alpha}\right)\right\| \leq \|g_1\|\,\|x\| = \|f\|\|x\|$$

donc $\|g\| \leq \|f\|$. □

Corollaire 5.3. *Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Soit $x_0 \in E - \{0\}$. alors il existe une forme linéaire continue $f : E \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{cases} f(x_0) = \|x_0\| \\ \|f\| = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Soit $x_0 \neq 0$, on pose $F = \operatorname{Vect}(x_0) = \{tx_0 \mid t \in \mathbb{K}\}, F$ est un sousespace et on définit le forme linéaire, $f_0 : F \to \mathbb{K}$, par $f_0(tx_0) = t\|x_0\|$. Alors f_0 est une forme linéaire continue sur F de norme $\|f_0\| = 1$ (puisque $|f_0(x)| = |t|\,\|x_0\| = \|x\|$ pour tout $x \in F$). D'après le corollaire précédent, f_0 admet une extension linéaire continue $f : E \to \mathbb{K}$ qui préserve la norme i.e. $\|f\| = \|f_0\| = 1$ et $f = f_0$ sur F, entraine que $f(x_0) = \|x_0\|$. □

Remarque 5.4. (1) Si $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel normé réel ou complexe, alors il existe toujours une forme linéaire continue et non identiquement nulle sur E i.e. $E' \neq \{0\}$.

(2) Montrer que tout sous-espace de dimension finie $F \subset E$ d'un evn admet un supplémentaire fermé (exercice).

On va décuire des résultats précédents que les éléments du dual E' séparent les éléments de E.

Corollaire 5.5. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Pour tous vecteurs $x_1 \neq x_2$ dans E, il existe $f \in E'$ telle que $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Démonstration. Si on pose $x = x_1 - x_2 \neq 0$, d'après le corollaire précédent, il existe $f \in E'$ telle que $f(x) = \|x\| > 0$ d'où $f(x_1) \neq f(x_2)$. □

Définition 5.6 (Hyperplan affine)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

(1) *Un* **hyperplan affine** *de E est un sous-espace affine de codimension 1 de E, ou, de manière équivalente une partie de E de la forme*

$$H = f^{-1}(\alpha) = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

où f est une forme linéaire non nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous dirons alors que $f = \alpha$ est une équation de H.

Un hyperplan vectoriel de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

(2) *On dit qu'un hyperplan affine H d'équation $f = \alpha$ sépare deux parties A et B de E si, quitte à échanger A et B, on a $A \subset f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ et $B \subset f^{-1}([\alpha, +\infty[)$.*

(3) *On dit qu'un hyperplan affine H d'équation $f = \alpha$ sépare strictement A et B* d *s'il existe $\epsilon > 0$ tel que, quitte à échanger A et B, on a $A \subset f^{-1}(]-\infty, \alpha - \epsilon])$ et $B \subset f^{-1}([\alpha + \epsilon, +\infty[)$.*

Proposition 5.7. *Soit $H = f^{-1}(\alpha)$ hyperplan affine de E, où f est une forme linéaire non nulle de E et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors H est fermé si et seulement si $f \in E'$ (c-à-d., f continue).*

Démonstration. On a $H = f^{-1}(\alpha) = a + \ker f$, d'où H est fermé si et seulement si $\ker f$ est fermé. Or $\ker f$ est fermé si et seulement si f est continue. □

Théorème 5.8 (Theoreme de Hahn-Banach - version géométrique, cas réel)**.** *Soit E un evn sur $\mathbb{R}$. Soient A et B deux convexes non vides disjoints de E.*

(1) *1ere forme géométrique :*

Si A est ouvert, alors il existe un hyperplan affine fermé séparant A et B.

(2) *2nd forme géométrique :*

Si A est compact et si B est fermé, alors il existe un hyperplan affine fermé séparant strictement A et B.

Démonstration. Voir H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications. □

On peut en déuire une version géométrique lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème 5.9 (Theoreme de Hahn-Banach - version géométrique, cas complexe)**.** *Soit E un evn sur C. Soient A et B deux convexes non vides disjoints de E.*

(1) *1ere forme géométrique :*

Si A est ouvert, alors il existe $f \in E' - \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b),\ \forall a \in A, b \in B.$$

(2) *2nd forme géométrique :*

Si A est compact et si B est fermé, alors il existe $f \in E' - \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\operatorname{Re} f(a) + \varepsilon \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b) - \varepsilon,\ \forall a \in A, b \in B.$$

6. Espaces réflexifs et espaces séparables

Soit E un espace normé. Le dual topologique E' de E est l'espace des formes linéaires continues sur E. C'est un espace normé, pour la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E=1} |f(x)|.$$

On note E'' le dual topologique de E' et on l'appelle le **bidual** de E.

Pour tout $x \in E$, on définit une forme linéaire φ_x sur E', par $\varphi(x)(f) = f(x)$. Comme,

$$|\varphi_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|_E \|f\|_{E'}$$

ainsi φ_x est un élément de E''.

Théorème 6.1. *E est isométriquement isomorphe à un sous-espace $\widetilde{E}$ de son bidual E''. Plus précisement l'application $J : E \to E''$ définie par $J(x) = \varphi_x$ est isomorphisme isométrique.*

Démonstration. On vérifie facilement que l'application J est linéaire, elle est continue car $\|J(x)\| = \|\varphi_x\| \leq \|x\|$. Il nous reste à montrer que J est une isométrie.

D'après le corollaire 5.3, pour tout $x \in E$, il existe $f \in E'$ telle que $f(x) = \|x\|$ et $\|f\| = 1$. D'où

$$\|J_E(x)\| = \|\varphi_x\| = \sup_{\|f\|=1} |\varphi_x(f)| \geq |\varphi_x(f)| = |f(x)| = \|x\|$$

ainsi $\|J_E(x)\| = \|x\|$. Ceci termine la preuve du théorème. □

L'isométrie $J : E \to J(E) \subset E''$ est appelée l'application canonique de E dans E''.

Définition 6.2 (Espace réflexif)**.** *Un espace vectoriel normé E est dit* **reflexif** *si $J(E) = E''$.*

Remarque 6.3. (1) Si E est reflexif, alors E est isométriquement isomorphe à E''. La réciproque est fausse.

(2) Tout espace de dimension finie est un espace réflexif. Les espaces ℓ^p $(1 < p < \infty)$ sont des espaces reflexifs.

(3) Tout espace normé réflexif est un espace de Banach, puisqu'il est isomorphe à son bidual qui est complet (d'après Théorème 4.7). La réciproque est en général fausse (voir remarque 6.4).

Remarque 6.4. ℓ^∞ est réflexif, car $\ell^\infty = (\ell^1)'$. Par contre ℓ^1, n'est pas réflexif, car $(\ell^\infty)' \neq \ell^1$ (voir remarque 6.16 plus loin).

Proposition 6.5. *Soit E un espace réflexif. Alors, tout élément $f \in E'$ atteint sa norme sur E.*

Démonstration. En effet, pour $f \in E'$, d'après le corollaire 5.3, il existe $\varphi_x \in E''$ tel que $\varphi_x(f) = \|f\|$ i.e $f(x) = \|f\|$. □

La réciproque de la proposition précédente est également vraie. Si toute forme linéaire continue $f \in E'$ sur un espace de Banach E atteint sa norme, alors E est réflexive (le théorème de James).

Proposition 6.6. *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors F, muni de la norme induite par E, est réflexif.*

Démonstration. Voir H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications (page 45). ☐

Proposition 6.7. *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

Démonstration. Voir H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications (page 45). ☐

Définition 6.8 (Espaces uniformément convexes)**.** *On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que*

$$(x, y \in \mathrm{E}, \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1 \quad et \quad \|x-y\| > \varepsilon) \Rightarrow \left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta\right)$$

Cette définition fait intervenir une propriété géométrique de la boule unité, qui doit être bien "ronde". Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ est uniformément convexes pour la norem $\|\cdot\|_2$, mais ne l'est pas pour la norme $\|\cdot\|_1$ (faire un dessin de la boule unité dans chaque cas).

Théorème 6.9 (Théorème de Milman-Pettis)**.** *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Démonstration. Voir H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications (page 51). ☐

Définition 6.10 (Espace séparable)**.** *Un espace vectoriel normé est dit* **séparable** *s'il admet un ensemble dénombrable dense.*

Lemme 6.11. *Si E admet une famille $(O_i)_{i\in I}$ non-dénombrable d'ouverts 2 à 2 disjoints, alors E n'est pas séparable.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que E est séparable, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense dans E. Soit $i_0 \in I$. On pose alors $\phi : \mathbb{N} \to I$ définie par

$$\phi(n) = \begin{cases} i_0 & \text{si } x_n \notin \cup_{i\in I} O_i \\ i & \text{si } x_n \in O_i \end{cases}$$

Cette application est bien définie (car les O_i sont 2 à 2 disjoints) et surjective (par densité des x_n). Contradiction car I non-dénombrable. ☐

Définition 6.12 (Suite totale)**.** *Une famille $\{x_i\}_{i\in I}$ d'un evn E est dite* **totale** *si l'espace vectoriel engendré par $\{x_i\}_{i\in I}$ est dense dans E i.e.*

$$\overline{\mathrm{Vect}\,\{x_i \mid i \in I\}} = E.$$

Une suite totale est une famille totale dénombrable.

Lemme 6.13. *Un espace vectoriel normé est séparable si et seulement s'il admet une suite totale.*

Démonstration. Si E est séparable il admet une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense, en particulier c'est une suite totale dense.

Réciproquement, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite totale de E. Alors,

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{\sum_{i\in J} \lambda_i x_i \mid I \text{ fini}, \lambda_i \in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q}\right\}$$

est un ensemble dénombrable et dense dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\,\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et donc dense dans E, ainsi E est séparable. ☐

Proposition 6.14 (Séparabilité des espaces ℓ^p)**.** (1) *Pour $p \in [1, +\infty[$, l'espace ℓ^p est séparables.*

(2) *L'espace ℓ^∞ ne l'est pas.*

Démonstration. (1) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on définit $\delta^j = (\delta^j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\delta^j_n := \begin{cases} 1 & \text{si } n = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si p fini, on vérifie que l'ensemble des combinaisons linéaires des δ^j à coefficients dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} := \{x + iy, x, y \in \mathbb{Q}\}$ est dénombrable et dense dans $\ell^p(\mathbb{N})$.

(2) Reste à montrer que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable. Pour cela, on utilise le lemme 6.11 avec $I = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$, et $O_i := B\left(i, \frac{1}{4}\right)$ pour $i \in I$, où $B\left(i, \frac{1}{4}\right)$ désigne la boule ouverte de centre i et de rayon $\frac{1}{4}$ dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$. □

Théorème 6.15 (Dualité et séparabilité)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. Si E' est séparable, il en est de même de E.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E' qui est dense. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que pour tout n

$$\|x_n\| = 1 \;\text{ et }\; |f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|\,\|x_n\|$$

On va montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans E. Pour cela, d'après la remarque précédente, il suffit de montrer que toute $f \in E'$ qui s'annule sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identiquement nulle.

Soit $f \in E'$ telle que $f(x_n) = 0 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par densité de la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_{n_\varepsilon}\| \leq \epsilon$. Donc

$$\frac{1}{2}\|f_{n_\varepsilon}\| \leq |f_{n_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon})| = |(f_{n_\varepsilon} - f)(x_{n_\varepsilon})|\,\|f_{n_\varepsilon} - f\|\|x_{n_\varepsilon}\| \leq \epsilon$$

Donc $\|f\| \leq \|f - f_{n_\varepsilon}\| + \|f_{n_\varepsilon}\| \leq 3\varepsilon$. Comme ε est arbitraire ceci entraîne que $f = 0$. □

Remarque 6.16. (1) On déduit de la proposition précédente que $(\ell^\infty)' \neq \ell^1$ car ℓ^1 est séparable, mais ℓ^∞ ne l'est pas.

(2) La réciproque à la proposition précédente, est en générale fausse ; par exemple : $(\ell^1)' = \ell^\infty; \ell^1$ est séparable, mais pas son dual ℓ^∞.

URL: `http://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Analyse-M1/`