Algèbre 2

Partiel du 8/11/2016 : Correction

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 2h

Exercice 1. (a) Déterminer tous les éléments d'ordre 9 du groupe $\mathbb{U}_{45}$.

(b) Déterminer tous les sous-groupes du groupe $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Correction. (a) Le groupe $\mathbb{U}_{45}$ est cyclique d'ordre 45 et engendré par $\xi = e^{2i\pi/45}$. Les éléments d'ordre 9 de $\mathbb{U}_{45}$ sont les générateurs du seul sous-groupe cyclique H_9 d'ordre 9. Il y en a $\varphi(9) = 3(3-1) = 6$. Ce sous-groupe peut être donné par $H_9 = \langle a \rangle$ où $a = \xi^{45/9} = e^{2i\pi/9}$. Un élément a^k $(0 \leq k \leq 8)$ est un générateur de H_9 si et seulement si $k \wedge 9 = 1$, c'est à dire $k = 1, 2, 4, 5, 7, 8$. Ainsi les éléments d'ordre 9 de $\mathbb{U}_{45}$ sont

$$a = e^{2i\pi/9}, a^2 = e^{4i\pi/9}, a^4 = e^{8i\pi/9}, a^5 = e^{10i\pi/9}, a^7 = e^{14i\pi/9}, a^8 = e^{16i\pi/9}.$$

(b) Le groupe $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est cyclique d'ordre 8 et engendré par $\bar{1}$. Ses sous-groupes correspondent donc aux diviseurs de 8 : 1, 2, 4, 8.

$H_1 = \{\bar{0}\}$.

$H_2 = \langle \frac{8}{2}\bar{1} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$H_4 = \langle \frac{8}{4}\bar{1} \rangle = \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$H_8 = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble E.

(a) On suppose que toute orbite contient au moins deux éléments, que $|G| = 15$ et que $\mathrm{card}(E) = 17$. Déterminer le nombre d'orbites et le cardinal de chacune.

(b) On suppose que $|G| = 33$ et $\mathrm{card}(E) = 19$. Montrer qu'il existe au moins une orbite réduite à un élément.

Correction. (a) Si $\mathcal{O}$ est une orbite de l'action de G sur E, alors $\mathbf{card}(\mathcal{O})$ divise $|G| = 15 = 3 \times 5$. Donc $\mathbf{card}(\mathcal{O}) \in \{1, 3, 5, 15\}$. Or $\mathbf{card}(\mathcal{O}) \geq 2$. Les orbites étant une partition de E, la somme des cardinaux de ces orbites est égal à $\mathbf{card}(E) = 17$. Il n'y a qu'une seule possibilité : $3 + 3 + 3 + 3 + 5 = 17$. Il y donc 4 orbites à 3 éléments et une orbite à 5 éléments.

(b) On suppose $|G| = 33$ et $\mathbf{card}(E) = 19$. Une orbites quelconque $\mathcal{O}$ a pour cardinal 1 ou 3 ou 11 ou 33. Une telle orbite ne peut avoir 33 comme cardinal, car $33 > 19$. Supposons que $\mathbf{card}(\mathcal{O}) \neq 1$. Mais aucune somme des diviseurs $\notin \{1, 33\}$ de 33 n'est égal à 19. Donc nécessairement il existe au moin un orbite réduite à un élément.

Exercice 3. *Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On suppose que :*

(α) : H et K sont des sous-groupes distingués de G,

(β) : $H \cap K = \{e\}$,

(γ) : $HK = G$.

On définit une application $f : H \times K \to G$ par $f(h, k) = hk$.

(a) Montrer que f est une application injective. [Utiliser (α)]
En déduire que f est bijective.

(b) Montrer que $hk = kh$ pour tout $h \in H$ et pour tout $k \in K$, [Utiliser (α) et (a)]

(c) En déduire que f est un isomorphisme de groupes.

Correction. (a) *Soient $h, h' \in H$ et $k, k' \in K$ tels que $f(h,k) = f(h',k')$, alors $hk = h'k'$ et $h^{-1}h' = kk'^{-1} \in H \cap K = \{e\}$. D'où $h = h'$ et $k = k'$ et l'application f est injective. Comme $f(H \times K) = HK = G$ donc f est surjective et par suite f est bijective.*

(b) Soit $h \in H$ et $k \in K$. Comme K est distingué dans G, il existe $k_1 \in K$ tel que $hk = k_1 h$, et comme H est distingué dans G, il existe $h_1 \in K$ tel que $k_1 h = h_1 k_1$. Donc $hk = h_1 k_1$ c-à-d. $f(h,k) = f(h_1,k_1)$ et comme f est injective, $h = h_1$ et $k = k_1$. D'où $hk = k_1 h = kh$.

(c) Montrons maintenant que f est un morphisme de groupes. Soient $(h,k),(h',k') \in H \times K$. On a

$$f[(h,k)(h',k')] = f[(hh',kk')] = (hh')(kk') = (hk)(h'k') = f[(h,k)]f[(h',k')],$$

car $h'k = kh'$. Ainsi f est un morphisme de groupes bijectif de $H \times K$ sut G.

Exercice 4. *Soit G un groupe fini, H et K deux sous-groupes de G. On suppose que :*

(α) : H et K sont des sous-groupes distingués de G,

(β) : $H \cap K = \{e\}$.

Montrer que HK est un sous-groupe distingué de G d'ordre $|H| \times |K|$. [Utiliser Exercice 3]

Correction. On a $e \in HK$ et si $g = hk \in HK$, $g' = h'k' \in HK$, alors $gg' = hkh'k' = hh'kk'$ d'après la question (b), Exercice 3. Donc HK est stable par le produit. De plus, si $g = hk \in HK$, alors $g^{-1} = k^{-1}h^{-1} = h^{-1}k^{-1}$, toujours d'après la question (b), Exercice 3. On en déduit que HK est un sous-groupe de G.

Montrons que HK est distingué dans G. Soit $hk \in HK$ et $g \in G$. On a $ghkg^{-1} = h_1 gkg^{-1}$, avec $h_1 \in H$, car H est distingué dans G; et $h_1 gkg^{-1} = h_1 k_1 gg^{-1} = h_1 k_1 \in HK$, avec $k_1 \in K$, car K est distingué dans G. Par conséquent, HK est distingué dans G.

L'application $f : H \times K \to HK$, $f(h,k) = hk$ est un isomorphisme de groupes. Donc $|HK| = |H \times K| = |H| \cdot |K|$.

Exercice 5. *Soit G un groupe d'ordre 55, possédant deux sous-groupes distingués H et K d'ordre 5 et 11 respectivement.*

Montrer que G est isomorphe $\mathbb{Z}/55\mathbb{Z}$. [Utiliser Exercice 4]

Correction. Si $x \in H \cap K$, alors $o(x)$ divise à la fois 3 et 11, donc $o(x) = 1$ et $x = e$. Par conséquent $H \cap K = \{e\}$.

D'après l'exercice 4, on sait que HK est un sous-groupe de G d'ordre $5 \times 11 = 55$, donc $HK = G$. On a vu aussi que HK est isomorphe à $H \times K$. Donc G est isomorphe à $H \times K$. Or H est d'ordre 5, donc (cyclique) isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. De la même façon, K est isomorphe à $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Donc $G \simeq H \times K \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/55\mathbb{Z}$, le dernier isomorphisme est dû au théorème chinois.

Exercice 6.

Soit G un groupe d'ordre 9. On veut montrer que G possède un ou quatre sous-groupes d'ordre 3.

(a) Supposons que G est cyclique, engendré par un élément a. Déterminer alors le seul sous-groupe d'ordre 3.

(b) Supposons que G n'est pas cyclique.

(i) Quel est l'ordre des éléments $x \in G$, $x \neq e$.

(ii) Déduire une écriture de G (décrire les éléments de G).

(iii) Déduire les sous-groupes d'ordre 3.

Correction. (a) Si G est cyclique, alors il existe un éléments $a \in G$ d'ordre 9 tel que $G = \langle a \rangle$. et dans ce cas $\langle a^3 \rangle$ est le seul sous-groupe d'ordre 3.

(b) Si G n'est pas cyclique, alors aucun élément de G n'est d'ordre 9. Tous les éléments sauf e sont donc d'ordre 3 et $G = \{e, x_1, x_1^2, x_2, x_2^2, x_3, x_3^2, x_4, x_4^2\}$. Dans ce cas $\langle x_i \rangle$ pour $1 \leq i \leq 4$ sont les 4 sous-groupes d'ordre 3.
